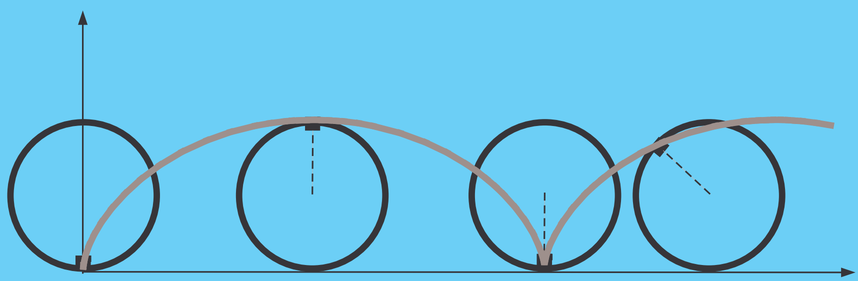
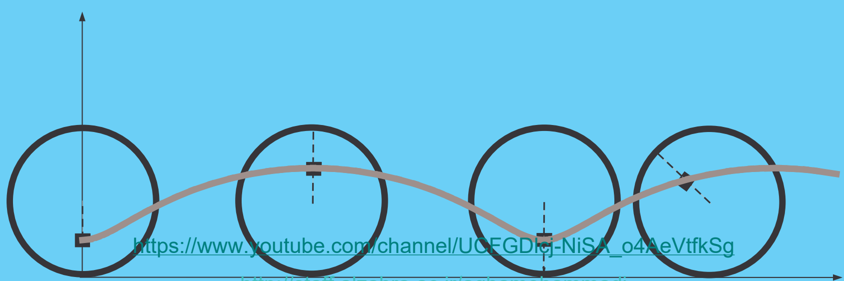
مکانیک

امیر آقامحمدی





https://www.youtube.com/channel/UCFGDlcj-NiSA_o4AeVtfkSg

http://staff.alzahra.ac.ir/aghamohammadi

پیش‌گفتار

ابن کتاب سالِ ۱۳۸۸ توسطِ انتشارات فاطمی و با عنوانِ کتابِ آشنایی با مکانیک چاپ شد. با توجه به قراردادی که با انتشاراتِ فاطمی داشتم حقِ انتشارِ کتاب به خودم عودت داده شد. این ویرایش در صفحه‌ی شخصی‌یِ من در دانشگاهِ الزهرا به آدرسِ

staff.alzahra.ac.ir/aghamohammadi

قابلِ دانلود است.

امیر آقامحمدی

تهران، ۱۳۹۹

https://www.youtube.com/channel/UCFGDlcj-NiSA_o4AeVtfkSg

http://staff.alzahra.ac.ir/aghamohammadi

سالِ ۱۹۶۷ اولین دوره‌ي المپیادِ فیزیک در لهستان برگزار شد. سال‌هايِ ۱۹۷۳ و ۱۹۷۸ این مسابقات برگزار نشد و سالِ ۲۰۰۹ چهلمین دوره‌ي مسابقاتِ المپیادِ جهانی‌يِ فیزیک در مکزیک برگزار شد. ایران از دوره‌يِ بیستم تا دوره‌يِ چهلم در این مسابقات شرکت کرده است. شرکتِ در این مسابقاتِ بین‌المللی و جایزه‌هایی مثلِ معافیت از کنکور انگیزه‌ای اضافی برایِ تعدادِ زیادی دانش‌آموز ایجاد کرده تا هر سال بیش‌تر و عمیق‌تر فیزیک بخوانند. بعضی از دانش‌آموزان مدتِ زیادی را به طورِ انفرادی، و یا جمعی در مدرسه برایِ یاد گرفتنِ فیزیک و آماده‌شدن برایِ امتحانِ ورودی‌يِ المپیاد صرفِ می‌کنند. بعضی‌ها شاید دو تا سه سال را صرفِ این کار می‌کنند. مدت‌زمانی که این افراد برایِ یادگیری‌يِ فیزیک صرف می‌کنند بسیار بیش‌تر است از آن چیزی است که به‌طورِ رسمی در مدارس آموزش داده می‌شود. بارها من این سئوال را از دانش‌آموزان شنیده‌ام که برایِ آمادگی در مسابقه‌يِ المپیادِ فیزیک چه چیزهایی باید خواند. در واقع یکی از مشکلات این است که خیلی از اینِ علاقه‌مندانِ فیزیک نمی‌دانند که چه‌کار باید بکنند و چه چیزهایی باید بخوانند یا اصلاً فیزیک را چه‌گونه باید بخوانند. حاصلِ المپیادِ فیزیک این بوده که مقداری شور و نشاط (و البته کمی هم سرخوردگی) به جامعه‌يِ دانش آموزی وارد شده و عده‌يِ زیادی همه ساله فیزیک را عمیق‌تر از آموزشِ رسمی و دقیق‌تر از گذشته یاد گرفته‌اند. برایِ آن‌که برایِ عده‌يِ بیش‌تری امکانِ یادگیری‌يِ فیزیک فراهم شود باید راه‌کارهایِ دیگری هم پیدا کرد. یک راهِ آن ساختنِ مدرسه‌يِ فیزیک است[1]؛ یعنی یک دوره‌يِ آموزشِ مثلاً دو یا سه ساله که دانش‌آموزِ علاقه‌مند به فیزیک، بتواند درس‌هایِ بیش‌تری در فیزیک بگذراند و تعدادی کتاب را به صورتِ رسمی آموزش ببینند. نوشتنِ متن‌هایِ مناسب لازمه‌يِ موفقیتِ ایده‌يِ مدرسه‌يِ فیزیک است.

نوشتنِ این کتاب گامی کوچک در این راه است. من فرض کرده‌ام مخاطبِ این کتاب دانش‌آموزِ دبیرستانی‌يِ علاقه‌مند به فیزیک یا دانش‌جویِ درسِ فیزیکِ عمومی است. این کتاب بخشی از مباحثِ مکانیکِ درسِ فیزیکِ عمومی را می‌پوشاند و سطحِ آن از کتاب‌هايِ دبیرستان کمی بالاتر است. خوب است قبل یا هم‌راهِ این کتاب، کتاب‌هایِ دوره‌يِ دبیرستان هم‌خوانده شوند، هر چند سعی‌شده حتی‌الامکان کتاب خودکفا باشد. تبحر و تمرینِ بیش‌تر در بخش‌هایِ ریاضی حتماً راه‌گشا است. کتاب تعدادِ زیادی مثال دارد، شکل‌ها با نرم‌افزار رسم شده‌اند و شکلِ منحنی‌ها دقیق‌اند. بخشی از مسائلی که در این کتاب آمده مربوط به امتحاناتِ انتخابی‌يِ المپیادِ کشوری و یا الهام گرفته از آن‌هاست. این سئوال‌ها توسط اعضایِ محترمِ کمیته المپیادِ فیزیک طرح شده‌اند. چون انتشاراتِ فاطمی مایل بود رسم‌الخطِ همه‌يِ کتاب‌هايِ مجموعه‌يِ ناب یک‌نواخت باشد رسم‌الخطِ استفاده شده در این کتاب با رسم‌الخطی که من معمولاً استفاده می‌کنم متفاوت است.

از محمود بهمن‌آبادی و محمد خرمی که کتاب را با حوصله خواندند به خاطرِ

[1] ایده‌يِ مدرسه يِ فیزیک در گاما، شماره‌يِ ۱۲، پاییزِ ۱۳۸۵ صفحه‌يِ ۱ مطرح شده است.

پیش‌نهادهایِ مفیدِشان و تذکرهایی که در موردِ برخی اشکالات داشتند تشکر کنم. از امیرحسین فتح‌الهی هم به‌خاطرِ پیش‌نهادِ چند مسئله که در کتاب آورده‌ام تشکر می‌کنم. خوش‌حال خواهم شد که اگر با اشکالی مواجه می‌شوید من را نیز آگاه کنید تا در چاپ‌هایِ بعدی اصلاح شود.

امیر آقامحمدی

پاییزِ ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

فصل ۱

اندازه‌گیری، ارقامِ معنی‌دار، تحلیل ابعادی، تقریب‌زدن و بررسی‌یِ رفتارِ حدّی

۱—۱ اندازه‌گیری، و ارقامِ معنی‌دار

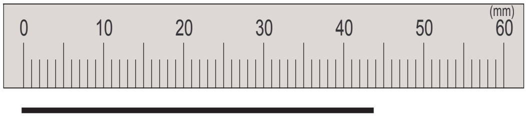
در فیزیک وقتی صحبت از یک کمیتِ مشاهده‌پذیر می‌کنیم منظورِمان آن است که آن کمیت قابلِ سنجش است. در فرآیندِ سنجش به هر کمیتِ فیزیکی یک عدد نسبت می‌دهیم. برایِ سنجشِ بعضی مشاهده‌پذیرها لازم است حتماً از یک ابزارِ سنجش مثلِ خط‌کش استفاده کنیم. اندازه‌یِ بعضی از مشاهده‌پذیرها مثلِ طولِ یک میز ممکن است عددی حقیقی[1] و اندازه‌یِ بعضی دیگر مثلِ تعدادِ ذرات عددی صحیح اند. البته نتیجه‌یِ هر سنجشی مثل طولِ میز هم نسبتِ دو چیز است و نتیجه‌یِ اندازه‌گیری حتماً

[1]اگرچه در اکثرِ نظریه‌هایِ فیزیکی مکان مقداری پیوسته اختیار می‌کند اما این فرض چندان بدیهی هم نیست. در فیزیکِ نظری مدل‌هایی وجود دارد که مکانِ یک ذره مقادیری گسسته اختیار می‌کند.

عددی صحیح و یا مقداری بینِ دو عددِ صحیح است. مثلاً در اندازه‌گیری‌یِ طولِ یک میز با استفاده از یک خط‌کش ما واحدِ طول را مشخص می‌کنیم و اندازه‌یِ میز عددی بینِ دو ضریبِ صحیح از این واحد است. با تغییرِ واحدِ طول، عددی که برایِ اندازه‌یِ میز به دست می‌آوریم، تغییر می‌کند. به بیانِ دیگر مقداری که برایِ طولِ میز به دست می‌آوریم بستگی به انتخابِ دستگاهِ واحد دارد. بعضی از مشاهده‌پذیرها بُعددار و بعضی بی‌بُعد هستند. آن‌ها که اندازه‌شان با تغییرِ دستگاهِ واحد عوض می‌شود بُعددار و آن‌ها که عوض نمی‌شود بی‌بعد هستند. طول کمیتی بُعددار و نسبتِ دو طول بی‌بعد است. اگر زاویه را بر حسبِ رادیان یعنی نسبتِ کمانِ زاویه به شعاعِ کمان بگیریم کمیتی بی‌بعد است. البته این تقسیم بندی‌یِ کمیت‌ها به بعددار و بی‌بعد به یک معنا هم اعتباری است. مثلاً سرعت کمیتی بُعددار با بُعدِ طول تقسیم بر زمان است. سرعتِ نور در خلأ C مقداری ثابت است. نور در خلأ در یک ثانیه $300{,}000$ کیلومتر را طی می‌کند. این مقدار بر حسبِ متر بر ثانیه و یا فوت بر ثانیه مقدارش فرق می‌کند. حالا ممکن است کسی سرعتِ نور را به عنوانِ واحدِ سرعت انتخاب کند و اندازه‌یِ هر سرعتی را به صورتِ نسبتِ آن سرعت به سرعتِ نور بیان کند. در این صورت نسبت یک سرعتِ معین به سرعتِ نور کمیتی بی‌بعد است و در همه‌یِ دستگاهِ واحدها یکی است.

بدیهی است که اندازه‌گیری دقتی دارد و هم‌راه با خطا است. توجه داریم که وقتی می‌گوییم اندازه‌گیری‌یِ ما با خطا هم‌راه است منظور این نیست که اندازه‌گیری‌یِ ما غلط است بل‌که منظور این است که در هر اندازه‌گیری‌ای یک حدّ ِدقتی وجود دارد که نتیجه‌یِ اندازه‌گیری نمی‌تواند از آن دقیق‌تر باشد. با تغییرِ ابزارِ اندازه گیری و شرایطِ آزمایش ممکن است بتوان خطایِ آزمایش را کوچک کرد ولی وجود خطا در آزمایش اجتناب‌ناپذیر است.

خطاهایی که ما در اندازه‌گیری با آن مواجه می‌شویم بخشی مربوط به خطایِ دستگاهِ اندازه‌گیری و بخشِ دیگر مربوط به ما به عنوانِ آزمایش‌گر است. ابزارهایِ



شکل ۱—۱: اندازه‌گیری با خط‌کش

اندازه‌گیری‌یِ ما هر کدام دقتی دارند و این محدودیت در اندازه گیری به خطایِ نتیجه‌یِ آزمایش منجر می‌شوند. فرض کنید بخواهیم طولِ پاره‌خطی را با خط‌کش اندازه بگیریم. خط‌کش را کنارِ خط قرار می‌دهیم به طوری‌که نقطه‌یِ صفرِ خط‌کش کنارِ یک سرِ پاره‌خط باشد. با مقایسه‌یِ سرِ دیگر پاره‌خط و علامت‌هایِ رویِ خط‌کش اندازه‌یِ پاره‌خط را می‌خوانیم. در شکلِ (۱—۱) انتهایِ پاره‌خط بینِ نقاطِ $43\ \mathrm{mm}$ و $44\ \mathrm{mm}$ است. با فرضِ این‌که ابزارِ اندازه‌گیری‌یِ ما، یعنی خط‌کش، خودش دقیق باشد، اندازه‌یِ پاره‌خط چیزی بینِ $43\ \mathrm{mm}$ و $44\ \mathrm{mm}$ است. ولی از این دقیق‌تر نمی‌توانیم چیزی در موردِ طولِ پاره‌خط بگوییم، مگر این‌که از ابزارِ دقیق‌تری استفاده کنیم. باید قاعده‌ای وضع کنیم که نتیجه‌یِ این اندازه‌گیری را به چه شکلی نشان دهیم. دقیق‌ترین چیزی که می‌توانیم بنویسیم این است که $L \in (43\ \mathrm{mm}, 44\ \mathrm{mm})$. در این مثال مشاهده‌پذیر که طولِ پاره‌خط است، یک کمیتِ حقیقی است. ممکن است قرارداد کنیم که $L = 44\ \mathrm{mm}$، یعنی مثلاً اندازه‌یِ بزرگ‌تر را انتخاب کنیم. توجه داریم که دقتِ اندازه‌گیری‌یِ ما از مرتبه‌یِ $1\ \mathrm{mm}$ است. کسی هم ممکن است نتیجه را به شکلِ

$$L = 43.5 \pm 0.5\ \mathrm{mm}. \tag{1}$$

گزارش کند. در موردِ اخیر اندازه‌یِ میانی انتخاب شده است. بعضی از ابزارهایِ

اندازه‌گیری رقمی[2] هستند. این ابزارها نتیجه را حتماً به صورتِ یک عددِ صحیح می‌دهند. مثلاً چنین ابزاری اگر دقتش میلی‌متر باشد، چون طولِ پاره‌خط به $44\ \mathrm{mm}$ نزدیک‌تر است، جوابش قاعدتاً $44\ \mathrm{mm}$ است.

گزارشِ هر کمیتِ اندازه‌پذیرِ a معمولاً به صورتِ $a \pm \delta a$ است[3] که a محتمل‌ترین مقدار یا نزدیک‌ترین مقدار به مقدارِ واقعی است و δa خطایِ اندازه‌گیری است. می‌توانیم بگوییم هر مشاهده‌پذیری یک مقدارِ واقعی دارد که ما در اندازه‌گیری سعی می‌کنیم نزدیک‌ترین اندازه به این مقدارِ واقعی را به دست آوریم. دقتِ ابزارِ اندازه‌گیری، شرایطِ خارجی مثلِ دما، رطوبتِ محیط، و $\cdots$ باعث می‌شوند نتیجه‌یِ اندازه گیری‌یِ ما مقدارِ واقعی نباشد. مثلاً در اندازه‌گیری‌یِ طولِ یک جسم به‌تر است بگوییم که مثلاً در این دما و این رطوبت و $\cdots$ طولِ جسم مثلاً این مقدار است. عددی که برایِ یک مشاهده‌پذیر معرفی می‌شود ممکن است چیزی مثلِ $x = 43 \pm 1\ \mathrm{mm}$ باشد. در این‌صورت خطایِ ما از مرتبه‌یِ $1\ \mathrm{mm}$ است. اما عددِ $x = 43 \pm 0.234\ \mathrm{mm}$ بی‌معنی است. زیرا اندازه‌یِ عدد با دقتِ میلی‌متر داده‌شده و خطایِ آن تا هزارمِ میلی‌متر. وقتی که دو عدد را که با دقت‌هایِ مختلفی اندازه‌گیری‌شده‌اند را با هم جمع می‌کنیم، مثلاً $42\ \mathrm{mm} + 2.2\ \mathrm{mm}$، باید حواسِ‌مان باشد که دقتِ نتیجه نمی‌تواند دقتِ عددِ دقیق‌تر باشد. در این جمع نتیجه $44\ \mathrm{mm}$ است. گاهی اوقات در بیانِ اندازه‌یِ یک کمیت از کلمه‌یِ مرتبه‌یِ بزرگی استفاده می‌کنیم، مثلاً اگر $A = 1000B$ باشد می‌گوییم، A سه مرتبه‌یِ بزرگی بزرگ‌تر از B است. در این صورت $100{,}000$ پنج مرتبه‌یِ بزرگی بزرگ‌تر از 10، و $1{,}000{,}000$ شش مرتبه‌یِ بزرگی بزرگ‌تر از 10 است. به این معنا به لحاظِ مرتبه‌یِ بزرگی $100{,}000$ به $1{,}000{,}000$ نزدیک‌تر است تا 10، ولی به لحاظ اختلافِ دو عدد فاصله‌یِ $100{,}000$ و $1{,}000{,}000$ تقریباً 9 برابرِ فاصله‌یِ $100{,}000$ و 10

[2] digital

[3] لازم نیست که خطا حتماً متقارن باشد. گاهی ممکن است کمیتِ فیزیکی به صورتِ $a + \delta a_1 - \delta a_2$ گزارش شود که δa_1 و δa_2 دو عددِ مثبت و خطایِ اندازه‌گیری هستند. بیش‌ترین مقداری که کمیتِ فیزیکی اختیار می‌کند $a + \delta a_1$ و کم‌ترین مقدارِ آن $a - \delta a_2$ است.

است. برایِ بیانِ دقیق‌ترِ مرتبه‌یِ بزرگی معمولاً از لگاریتم در مبنایِ 10 عدد استفاده می‌شود. با توجه به این که $\log 3 \approx 0.5$ است عددِ آووگادرو یعنی 6.02×10^{23} از مرتبه‌یِ بزرگی‌یِ 10^{24} است، و یک سال که حدودِ 5.259×10^5 دقیقه است از مرتبه‌یِ 10^6 دقیقه است.

واحدِ طول متر است. در ابتدا استاندارِدِ متر را 10^{-7} برابرِ فاصله‌یِ قطبِ شمال تا استوا می‌گرفتند[4]. بعدها این استاندارد تغییر کرد. امروزه استانداردِ متر طولی است که نور در خلأ در $1/299\ 792\ 458$ اُم ثانیه می‌پیماید. برایِ طول واحدهایِ دیگری مثلِ کیلومتر، $1\mathrm{km} := 10^3\ \mathrm{m}$، یا میلی‌متر، $1\ \mathrm{mm} := 10^{-3}\ \mathrm{m}$، نیز استفاده می‌شود. در این رابطه علامتِ $:=$، علامتِ "تعریف می‌شود" است. کمیتِ دیگری که در مکانیک با اندازه‌گیری‌یِ آن روبه‌رو هستیم زمان است. هر پدیده‌یِ دوره‌ای با دوره‌یِ منظم را می‌توان به عنوانِ استانداردِ زمان انتخاب کرد. ثانیه واحدِ زمان است. زمانی ثانیه بر اساسِ روزِ متوسطِ خورشیدی یعنی $\frac{1}{60\times60\times24}$ تعریف می‌شد. امروزه یک ثانیه بر حسبِ ضریبی از دوره‌یِ ارتعاشاتِ یکی از تابش‌هایِ اتمِ سزیومِ 133، تعریف می‌شود. نوری که از این اتم تابش می‌شود در یک ثانیه $9{,}192{,}631{,}770$ ارتعاش دارد. خوبی‌یِ این استاندارد در دسترس بودن و دقتِ بالایِ آن است. علاوه بر اندازه پارامترهایِ دیگری هم به اجسام نسبت می‌دهیم. یکی از آن‌ها جرم است که در فصل‌هایِ بعد با آن آشنا می‌شویم. یکی از واحدهایِ جرم کیلوگرم، kg، است. میله‌ای از جنسِ آلیاژی از پلاتین و ایریدیوم که فوق‌العاده پای‌دار است به عنوانِ استانداردِ جرم انتخاب شده و در موزه‌ای در فرانسه نگه‌داری می‌شود.

بعضی مشاهده‌پذیرها مثلِ سرعت واحدِشان ترکیبی است، مثلاً کیلومتربرساعت $(\mathrm{km/h})$. در این موارد گاهی ممکن است بخواهیم از تبدیلِ واحدها استفاده کنیم. مثلاً سرعتِ ماشینی که $72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ است را می‌توانیم بر حسبِ متربرثانیه نیز بنویسیم. برایِ این‌کار لازم است برایِ هر بُعد از کسرهایی مثلِ $\frac{1000\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{km}}$ استفاده کنیم. خوب است به

[4] اگر شکلِ زمین را کره بگیریم شعاعِ آن چه‌قدر می‌شود؟

این نکته توجه کنیم که این کسر برابر با یک است. در مثالِ زیر واحدهایِ km و h از صورت و مخرجِ کسر حذف می‌شوند و سرعت بر حسبِ متر بر ثانیه به دست می‌آید.

$$72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 72\ \frac{\cancel{\mathrm{km}}}{\cancel{\mathrm{h}}} \times \frac{1000\,\mathrm{m}}{1\,\cancel{\mathrm{km}}} \times \frac{1\,\cancel{\mathrm{h}}}{3600\,\mathrm{s}} = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \qquad (2)$$

۱—۲ تحلیل ابعادی

در این بخش می‌خواهیم با روشِ تحلیلِ ابعادی آشنا شویم[5]. همان‌طور که دیدیم مشاهده‌پذیرها در فیزیک دو دسته‌اند: کمیت‌هایِ نوعِ اول بُعددار و کمیت‌هایِ نوعِ دوم بی‌بُعد هستند. بُعدِ مکان x که آن را با $[x]$ نشان می‌دهیم، L، بُعدِ زمان $[t] = T$، و بُعدِ سرعت $[v] = LT^{-1}$ است. طولِ یک میز مشاهده‌پذیری از نوعِ اول و تعدادِ ذراتِ یک گاز از نوعِ دوم است. برایِ ارائه‌یِ اندازه‌یِ هر کمیتِ مشاهده‌پذیرِ بُعددار یک دستگاهِ واحد لازم است. با تغییرِ دستگاهِ واحدها مقدارِ عددی‌یِ کمیت عوض می‌شود. مثلاً ارتفاعِ یک میز را به شکل‌هایِ 1 m و یا 100 cm می‌توانیم بنویسیم. پس مقدارِ عددی‌یِ هر کمیتِ بُعددار به دستگاهِ واحدی که انتخاب می‌کنیم بستگی دارد.

در هر تساوی‌ای دو طرفِ معادله هم‌بُعد اَند. مثلاً در رابطه‌ای که برایِ مساحتِ یک مستطیل با طولِ a و عرضِ b داریم، $A = ab$، هر دو طرفِ معادله بُعدِ L^2 دارند. با تغییرِ دستگاهِ واحدها مقدارِ عددی‌یِ هر دو طرف معادله عوض می‌شود ولی تساوی‌یِ دو طرف کماکان برقرار است. البته این رابطه را به صورتِ $A/(ab) = 1$ هم می‌توان نوشت. در این صورت دو طرفِ رابطه بی‌بُعدند. سمت راستِ معادله‌یِ آخر در هر دستگاهِ واحدی 1 است. اگر دو طرفِ یک تساوی کمیت‌هایی با ابعادِ مختلف باشند

[5] مرجعِ 1 از مراجعِ اصلی در این زمینه است. برایِ بحثِ کامل‌ترِ موضوع به زبانِ فارسی می‌توانید مرجعِ 2 را ببینید.

نتیجه تنها در یک دستگاهِ واحد می‌تواند درست باشد. حسن می‌گوید به اندازه‌یِ مبلغِ A از حسین طلب‌کار و به اندازه‌یِ مبلغِ B به علی بده‌کار است. اگر او بگوید بینِ این دو عدد رابطه‌یِ $B = A^2$ برقرار است، حرفِ او خوش‌تعریف نیست. در واقع با انتخاب واحدِ پول‌هایِ مختلف نتایجِ مختلفی به دست می‌آید. فرض کنیم A، 1000 تومان باشد در این صورت B می‌شود 1000000 تومان. اگر واحد را ریال بگیریم A، 10000 ریال و B می‌شود 100000000 ریال (که همان 10000000 تومان است). و بالاخره اگر واحد را دلار بگیریم A، یک دلار و B هم می‌شود یک دلار (که همان 1000 تومان[6] است). اگر بخواهیم رابطه‌ای فیزیکی در هر دستگاهِ واحدی درست باشد، باید دو طرفِ تساوی در آن رابطه هم‌بُعد باشند.

بزرگی و کوچکی‌یِ یک کمیتِ بُعددار بی‌معناست و نمی‌توانیم از بزرگی و یا کوچکی‌یِ یک کمیتِ بُعددار حرف بزنیم. با تغییرِ دستگاهِ واحدها اندازه‌یِ کمیت مشاهده‌پذیر عوض می‌شود. ارتفاعِ یک میز را که $1\,\mathrm{m}$ است را اگر بر حسبِ آنگستروم[7] بنویسیم عددی بسیار بزرگ و اگر بر حسبِ واحدِ نجومی[8] بنویسیم عددی بسیار کوچک است. از تقسیم دو کمیتِ هم‌بُعد کمیتی بی‌بُعد به دست می‌آید. حالا اگر کوچکی و بزرگی را نسبت به 1 بسنجیم، می‌توانیم بگوییم که این عدد کوچک است یا بزرگ. مثلاً فاصله‌یِ $d_1 = 1\,\mathrm{m}$ نسبت به ابعاد هسته‌ای یعنی اعدادی از رتبه‌یِ $d_2 = 10^{-15}\,\mathrm{m}$ بسیار بزرگ، و نسبت به یک سالِ نوری[9] یعنی چیزی حدودِ $d_3 = 10^{16}\,\mathrm{m}$ بسیار کوچک است. در این صورت $\Pi_1 := d_1/d_2 = 10^{15} \gg 1$ و $\Pi_2 := d_1/d_3 = 10^{-16} \ll 1$. روابطِ اَخیر به دستگاهِ واحد هم بستگی ندارد. اگر

[6] برایِ سادگی دلار را 1000 تومان گرفته‌ایم.

[7] شعاعِ اتمِ هیدوژن از مرتبه‌یِ یک آنگستروم است. آنگستروم با Å نمایش داده می‌شود و $1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$.

[8] واحدِ نجومی، شعاعِ مدارِ زمین به دورِ خورشید است و با AU نمایش داده می‌شود. $1\,\mathrm{AU} = 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ است.

[9] یک سالِ نوری فاصله‌ای است که نور در یک سال طی می‌کند. سرعتِ نور تقریباً $3 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$ و مدتِ یک‌سال تقریباً $3.15 \times 10^{7}\,\mathrm{s}$ است.

مقدارِ d_1، d_2، و d_3 را بر حسبِ هر واحدِ دیگری (مثلاً mm) هم جاگذاری کنیم، همان مقادیرِ عددی‌یِ قبلی برایِ Π_1 و Π_2 به دست می آید.

اغلب در محاسبه‌ها با کمیت‌هایی با ابعادِ گوناگون سروکار داریم. ببینیم چه کارهایی با کمیت‌هایِ بُعد دار می‌توان انجام داد. دو کمیتِ هم‌بُعد را می‌توان جمع یا از هم کم کرد، و کمیتی هم که به دست می آید همان بُعد را دارد. اما جمعِ کمیت‌هایِ با بُعدِ مختلف بی‌معناست. کمیتی با بُعد طول را با کمیتی با بُعدِ مساحت نمی‌توان جمع کرد. اما کمیت‌هایِ با بُعدِ متفاوت را می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. از ضربِ کمیتی با بُعدِ طول در کمیتی با بُعدِ مساحت کمیتی با بُعدِ حجم به دست می آید. مقایسه‌یِ بزرگ‌تری ـ کوچک‌تری نیز برایِ کمیت‌هایی با بُعدهایِ مختلف بی‌معناست.

به طورِ خلاصه:

۱) تنها کمیت‌هایِ هم‌بُعد را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد.

۲) کمیت‌هایِ مختلف را می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. لزومی ندارد که این کمیت‌ها بُعدِشان یکی باشد. بُعدِ کمیتِ نهایی نیز از ضرب و تقسیمِ اَبعادِ همان کمیت‌ها به دست می آید.

تابعیِ مثلِ

$$f(x) = a\ x^2 + b\ x^3, \tag{3}$$

تنها در صورتی از لحاظِ اَبعادی صحیح است که بُعدِ ax^2 و bx^3 یکی باشد. بنا بر این در یک چندجمله‌ای تمامِ جملات می‌توانند بُعددار باشند ولی تمامِ جملاتِ آن باید هم‌بُعد باشند. تابعی مثلِ

$$f(x) = \sin\ ax, \tag{4}$$

تنها در صورتی از لحاظِ اَبعادی صحیح است که ax بی‌بُعد باشد. زیرا در بسطِ $\sin ax$ جملاتِ ax و a^3x^3 ظاهر می‌شوند. در واقع برایِ چنین توابعی آرگومانِ تابع باید بی‌بُعد باشد. تابعِ زیر را در نظر بگیرید

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-C_2 x} + C_3 x^3 + C_4. \tag{5}$$

فرض کنید بدانیم که بُعدِ x و y، L است. در این صورت بُعدِ پارامترهایی که در این معادله وارد شده به قرارِ زیر اند

$$[C_1] = L, \quad [C_2] = L^{-1}, \quad [C_3] = L^{-2}, \qquad [C_4] = L. \tag{6}$$

برایِ تحلیلِ دقیقِ یک پدیده لازم است قوانینِ حاکم بر آن را بشناسیم. بیش‌ترِ اوقات اطلاعاتِ ما کامل نیست، یا قوانینِ حاکم بر پدیده را نمی‌شناسیم یا قادر به حلِ معادلاتِ ناشی از آن نیستیم. البته معنی‌یِ این حرف این نیست که ما نمی‌توانیم هیچ نتیجه‌یِ فیزیکی‌ای داشته باشیم. اگر تنها اطلاعِ ما بُعدِ کمیت‌هایِ فیزیکی‌یِ مسئله باشد هنوز ممکن است بتوان نتایجی اخذ کرد. هرچه اطلاعاتِ ما بیش‌تر باشد نتایجِ بیش‌تری به دست می آید.

مثالِ1) فردی را در نظر بگیرید که قدش 2 متر و جرمش 100 کیلوگرم است. اگر همه‌یِ ابعادِ بدنِ این فرد با ضریبِ 2 مقیاس شود، قدش 2 برابر یعنی 4 متر و جرمش 8 برابر یعنی 800 کیلوگرم می‌شود. سطحِ پاهایش 4 برابر و فشارِ رویِ پاهایش، یعنی نیرویِ وارد بر پاهایش در واحدِ سطح، 2 برابر می‌شود. ممکن است دلیلِ این‌که آدم‌هایِ 4 متری نداریم همین باشد. چون جنسِ استخوانِ همه شبیهِ هم است (این فرضی است که با تجربه هم می‌خواند)، اگر فشارِ رویِ پاها از حدی بیش‌تر شود استخوانِ پا می‌شکند. با دانستنِ بیشینه فشاری که پاها می‌توانند تحمل کنند بیشینه

قدی که یک انسان می‌تواند داشته باشد را می‌توان به دست آورد. بنابراین در قصه‌یِ گالیور غول‌ها یا آدم‌های خیلی بزرگ نباید بتوانند راه بروند. مگر این‌که یا جنسِ استخوانِ‌شان فرق کند یا این‌که سطحِ تماسِ‌شان با زمین بزرگ‌تر شود.

دو آدمِ چاق و لاغر اگر جایی پابرهنه راه بروند پایِ آدمِ چاق بیش‌تر کثیف می‌شود (چرا؟).

زمانی کارتونی از تلویزیون پخش می‌شد که شخصیتِ اصلی‌یِ آن یک گوریلِ 15 متری بود. گوریلی معمولی با قدی حدود 1.5 متر در نظر بگیرید. گوریل 15 متری قدش حدودِ 10 برابرِ یک گوریلِ معمولی است، وزنش $10^3 = 1000$ برابر و سطحِ پاهایش $10^2 = 100$ برابرِ یک گوریلِ عادی می‌شود. فشارِ رویِ پاهایش یعنی نسبتِ نیرویِ وزن به سطحِ پاهایش هم 10 برابر است. معنی‌یِ این حرف این است که نیرویِ وارد به واحدِ سطحِ استخوانِ پایِ چنین گوریلی 10 برابر نیرویِ وارد به واحدِ سطحِ استخوانِ پایِ یک گوریلِ عادی است. با توجه به این که انتظار نداریم جنسِ استخوان‌هایِ گوریل‌ها فرق داشته باشد، گوریلِ 15 متری نباید یک استخوانِ سالم هم در پاهایش داشته باشد. در واقع موجوداتِ بزرگ نمی‌توانند مقیاس‌شده‌یِ موجوداتِ کوچک باشند. به همین دلیل است که در طبیعت خرگوشِ عظیم‌الجثه نداریم. موجوداتِ بزرگ مشکلِ‌شان را این‌طور حل کرده‌اند که استخوان‌هایِ پاهایِ‌شان در مقایسه با بقیه‌یِ اندام‌ها ضخیم‌تر است. نسبتِ وزنِ استخوان به کلِ بدن در موجوداتِ مختلف متفاوت است. هر چه موجود بزرگ‌تر باشد این نسبت بزرگ‌تر می‌شود. موش یا چکاوک 8% بدنش استخوان است، در حالی‌که غاز یا سگ 13%، و انسان 17% تا 18% بدنش را استخوان تشکیل می‌دهد. هر چه موجودی بزرگ‌تر باشد مقدارِ استخوانِ بدنش بیش‌تر می‌شود. برایِ موجوداتِ خیلی بزرگ مثلِ دایناسورها استخوان‌بندی بسیار ضخیم‌تر است و مقیاس شده‌یِ استخوان‌بندی‌یِ موجودات کوچک‌تر نیست. اندازه‌یِ جثه‌یِ موجوداتِ رویِ زمین نیز هر مقداری نمی‌تواند باشد. موجوداتِ چهارپا می‌توانند بزرگ‌تر از موجوداتِ دوپا باشند. در واقع موجوداتی که رشدِ اُفقی دارند

می‌توانند نسبت به موجوداتِ دوپا قدِ بلندتری داشته باشند. اگر بخشی از بدنِشان در آب باشد باز هم می‌توانند بزرگ‌تر باشند. بزرگ‌ترین پستان‌دار در آب زندگی می‌کند.

با استدلالِ مشابهی می‌توان تخمین زد که ارتفاعِ بیشینه‌یِ یک کوه چه‌قدر می‌تواند باشد. برایِ هر سنگی یک آستانه‌یِ فشاری وجود دارد. اگر فشار از آن مقدار بیش‌تر شود سنگ روان می‌شود. اگر ارتفاعِ کوه زیاد شود فشاری که به سنگ‌های زیر کوه وارد می‌شود از این آستانه می‌گذرد و با روان‌شدنِ آن‌ها ارتفاعِ کوه کم می‌شود. به این دلیل است که کوهِ مثلاً 50000 متری نداریم. بلندترین کوهِ منظومه‌یِ شمسی در یکی از قمرهایِ بهرام است. چون میدانِ گرانش در سطحِ این قمر کوچک‌تر است فشارِ رویِ سنگ‌هایِ زیرِ کوه کم‌تر و ارتفاعِ کوه می‌تواند بیش‌تر باشد. ارتفاعِ بلندترین کوه روی زمین حدودِ 8000 متر است، ولی ارتفاعِ بلندترین کوهِ منظومه‌یِ شمسی حدودِ 20000 متر است.

مثالِ2) حشرات شُش ندارند و اکسیژنِ موردِ نیازِشان را نوعاً از طریقِ پوستِشان جذب می‌کنند. حشره را تقریباً به شکلِ کره بگیریم. اگر حشره‌ای دو برابر شود، سطحش 4 برابر و حجمش 8 برابر می‌شود. چون سطحِ پوستش 4 برابر شده می‌تواند 4 برابر اکسیژن جذب می‌کند. اما از طرفِ دیگر تعدادِ ملکول‌هایش 8 برابر و بنا بر این نیازش به اکسیژن 8 برابر می‌شود. پس اگر حشره دو برابر شود، دو برابر اکسیژن کم می‌آورد. احتمالاً به این دلیل است که حشرات از یک حدی بزرگ‌تر نیستند (حدودِ چند سانتی‌متر). آن‌چه گفتیم برایِ حشره‌های کروی (!) مثلاً زنبورِ عسل بود. اگر حشره‌ای خیلی کشیده باشد، مثلاً سنجاقک، مدلِ بالا برایش کار نمی‌کند. در واقع حشره‌هایِ بزرگ‌تر حشره‌هایی کشیده هستند. در حالِ حاضر ۲۰ درصد هوا اکسیژن است. اگر درصدِ بیش‌تری از هوا اکسیژن بود احتمالاً حشره‌هایِ بزرگ‌تری می‌داشتیم. نظریه‌هایی وجود دارد که می‌گوید میلیون‌ها سال قبل که بخشِ بزرگی از زمین پوشیده از جنگل‌هایِ انبوه بود درصدِ اکسیژن بیش‌تر بود. ممکن است در آن زمان حشراتِ بزرگ‌تری هم وجود داشته‌اند.

حالا فرض کنید موجوداتی مواد غذاییِ خودشان را از طریقِ سطحِ بدنِشان جذب کنند. اگر این موجودات a برابر بزرگ‌تر شوند سطحِ بدنِشان a^2 برابر می‌شود ولی حجمِشان و در نتیجه تعدادِ سلول‌هایِ بدنِشان a^3 برابر می‌شود. در نتیجه با بزرگ‌شدنِ این موجودات نسبتِ سطح به حجمِ بدنِشان کوچک می‌شود. یعنی هرچه این موجود بزرگ‌تر باشد، سهمِ کم‌تری ماده‌یِ غذایی به سلول‌هایِ بدنش می‌رسد. این مشکل در بدنِ انسان‌ها توسطِ روده‌هایی بلند و لوله‌ای‌شکل حل شده. به این طریق سطحی که ماده‌یِ غذایی را جذب می‌کند بزرگ‌تر شده.

مثالِ3) در قطب خرسِ قطبی وجود دارد ولی موشِ قطبی پیدا نمی‌شود. دلیلش چیزی شبیهِ مثالِ قبل است. تولیدِ گرما به حجم بستگی دارد ولی اتلافِ گرما از طریقِ سطح است. بنابراین اتلافِ انرژی به انرژی‌یِ تولیدشده با عکسِ طول مقیاس می‌شود. موش تقریباً 100 گرم و خرسِ قطبی حدودِ 600 کیلوگرم است. حجمِ موش حدودِ $100\ \mathrm{cm}^3$ و حجمِ خرس تقریباً $600 \times 1000\ \mathrm{cm}^3$ است.

$$\left(\frac{10^{-2}}{6 \times 10^{-5}}\right)^{1/3} \approx 20 \tag{7}$$

پس اتلافِ انرژی‌یِ موش نسبت به خرس حدودِ 20 برابر است. زندگی در قطب برایِ موش خیلی سخت‌تر از خرس است. البته این تنها پارامتر نیست. پارامترهایِ کنترل‌کننده‌یِ دیگری مثلِ مواردی که به یافتنِ غذا مربوط می‌شوند هم وجود دارد. این مجموعه‌یِ پارامترها هستند که تعیین می‌کنند کدام موجود امکانِ بقاء دارد.

هر معادله‌ای در فیزیک رابطه‌ای بینِ دو و یا چند کمیت است. فرض کنید رابطه‌یِ فیزیکیِ موردِ نظرِ ما به صورتِ رابطه‌ای بینِ کمیت‌هایِ Q_1، Q_2، Q_3، $\cdots$، Q_N باشد.

$$Q_1 = f(Q_2, \cdots Q_N). \tag{8}$$

می‌توان نشان داد[10] از این کمیت‌ها که بُعد دارند می‌توان تعدادی کمیتِ بی‌بُعدِ Π_i، مثلاً به شکلِ $\Pi_i := Q_1^{\alpha_i} Q_2^{\beta_i} Q_3^{\gamma_i}$، ساخت. تعدادِ کمیت‌هایِ بی‌بُعد حتماً کم‌تر یا برابر با N است، مثلاً Π_1، Π_2، Π_3، $\cdots$، Π_M به طوری که $M \le N$. در این‌صورت رابطه‌یِ فیزیکی‌یِ (8) را می‌توان به شکلِ

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \cdots \Pi_M). \tag{9}$$

نوشت. فرض کنید رابطه‌یِ فیزیکیِ موردِ نظرِ ما به صورتِ رابطه‌ای بینِ سه کمیتِ Q_1، Q_3 و Q_2 باشد.

$$Q_1 = f(Q_2, Q_3). \tag{10}$$

اگر از این سه کمیت که بُعد دارند تنها یک کمیتِ بی‌بُعدِ Π، مثلاً به شکلِ $\Pi := Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta} Q_3^{\gamma}$، بتوان ساخت رابطه‌یِ فیزیکی‌یِ موردِ نظرِ ما به شکلِ

$$\Pi = \text{ثابت}. \tag{11}$$

در می‌آید. بنا بر این

۱) ابتدا لازم است که کمیت‌هایِ فیزیکیِ دخیل در مسئله را بشناسیم.

و سپس

۲) کمیت‌هایِ بی‌بُعدِ مسئله را بسازیم.

۳) رابطه‌یِ فیزیکی‌یِ ما رابطه‌ای بینِ این کمیت‌هایِ بی‌بُعد است.

بندِ اول معمولاً سخت‌ترین بخشِ مسئله است. اگر تنها یک کمیت را در نظر نگرفته باشیم جواب ما می‌تواند کاملاً غلط باشد. در صورتی که تمامِ کمیت‌هایِ بُعددارِ مسئله

[10] می‌توانید مرجعِ 2 را ببینید.

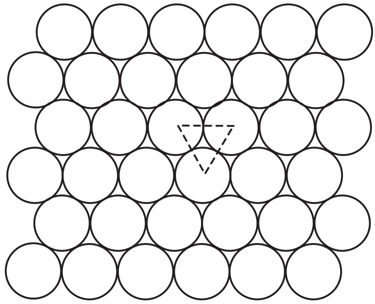
مثلاً $Q_i,\ i = 1,\cdots N$ را بشناسیم، ساختنِ کمیت‌هایِ بی‌بُعدِ مسئله $\Pi_i,\ i = 1,\cdots M$ کاری ساده است. ابتدا ترکیبی مثلِ

$$\Pi_1 = Q_1^{\alpha_1}\cdots Q_N^{\alpha_N} \tag{12}$$

را می‌سازیم. مجموعه‌یِ α_i ها باید به گونه‌ای باشند که Π_1 بی‌بُعد باشد. به همین صورت ادامه می‌دهیم و بقیه‌یِ Π_i ها را می‌سازیم. اگر اَبعادی که در همه‌یِ Q_i ها ظاهر می‌شوند m تا باشد، m معادله از شرطِ بی‌بُعد بودنِ Π_i ها به دست می‌آید. در صورتی که m معادله مستقل باشند، تعدادِ کمیت‌هایِ بی‌بُعدِ مستقلِ مسئله $M = N - m$ تاست. اگر تنها یک کمیتِ بی‌بُعد داشته باشیم، در جوابِ نهایی یک ثابتِ بی‌بُعد می‌ماند که تنها با تحلیلِ اَبعادی چیزی راجع به آن نمی‌توان گفت. اگر کمیت‌هایِ بی‌بُعد بیش از یک باشد، در جوابِ نهایی توابعی از کمیت‌هایِ بی‌بُعد باقی می‌ماند که تنها با تحلیلِ اَبعادی چیزی راجع به آن‌ها نمی‌توان گفت. گاهی با استفاده از اطلاعاتِ دیگر هم‌راه با تحلیلِ ابعادی می‌توانیم اطلاعاتِ زیادی در موردِ سیستم به دست آوریم. در این‌جا برایِ آشنا شدن با روشِ تحلیلِ ابعادی چند مثال می‌آوریم.

مثالِ4) دایره‌ای به شعاعِ R در نظر بگیرید. با تعیینِ شعاعِ دایره، محیطِ آن، D، به طورِ یکتا تعیین می‌شود. هر دویِ این‌ها بُعدِ طول دارند. تنها یک کمیتِ بی‌بُعدِ D/R در مسئله وجود دارد. از (11) نتیجه می‌شود، این کمیت ثابت است. اندازه‌یِ این ثابت که 2π است از تحلیلِ ابعادی در نمی‌آید. با استدلالِ مشابهی نتیجه می‌شود مساحتِ دایره S متناسب با R^2 است.

مثالِ5) اگر بخواهیم سطحی را با کاشی‌هایِ دایره‌ای بپوشانیم حتیٰ با آرایشِ منظم هم نمی‌توانیم همه‌یِ سطح را بپوشانیم. البته بدیهی است با آرایش‌هایِ مختلفِ کاشی‌هایِ دایره‌ای اندازه‌یِ سطحِ پوشانده شده متفاوت است ولی هیچ آرایشی وجود ندارد که کلِ سطح را کاملاً بپوشاند. نسبت سطحِ پوشیده شده به کل سطح را "پکش"



شکل ۱—۲: پکشِ بیشینه‌ی تعدادی سکه

می‌گویند[11]. در موردی که از کاشی‌هایِ مربعی استفاده کنیم و آن‌ها به طورِ منظم کنارِ هم بچینیم، پکش یک است. اگر بخواهیم همان سطح را با کاشی‌هایِ دایره‌ای شکل بپوشانیم پکش حتماً کوچکتر از یک است. برایِ مثال چیدن سکه‌هایِ دایره‌ای با پکشِ بیشینه را در شکلِ (۱—۲) می‌بینیم.

برایِ سنجشِ فضایِ پوشانده‌شده از پکش، σ، استفاده می‌کنیم. در محاسبه‌یِ σ برایِ آرایشِ منظم کافی است ببینیم پکش در یک سلول واحد چه‌قدر است. سلولِ واحد به این صورت تعریف می‌شود که با چیدنِ منظمِ این سلول‌ها کنارِ هم کلِ سطح ساخته‌شود. برایِ پوشاندنِ سطحی نامحدود با سکه، مدلی که در شکلِ (۱—۲) نشان داده‌شده بیش‌ترین سطح را می‌پوشاند. در این مدل سلولِ واحد مثلثی است که سه رأسش مرکز سه دایره‌ی مجاور است. در هر سلولِ واحد به اندازیِ سه تا $1/6$ دایره پوشیده شده. اگر شعاعِ دایره‌ها را R بگیریم، مساحتِ هر سلول $\sqrt{3}R^2$ است و بیش‌ترین سطح پوشانده‌شده σ برابر است با

$$\sigma = \frac{3(\frac{\pi R^2}{6})}{\sqrt{3}R^2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \simeq 0.91. \tag{13}$$

[11] می‌توانید مرجعِ 3 را ببینید.

بنا بر این در این نوع چیدن 91 درصدِ سطح پوشانده می‌شود. از آن جا که σ کمیتی بی‌بعد است و چون در این مثال هیچ کمیت دیگری به غیر از R با بعدِ طول نداریم، همان طورکه انتظار می‌رود σ به R بستگی ندارد. بنابراین حداکثر سطحی را که با تعدادی سکه‌یِ مشابه با هر شعاعِ دلخواهی، می‌توان پوشاند 0.91 سطحِ کل است. بدیهی است اگر سطحی را که می‌خواهیم بپوشانیم محدود باشد بسته به اندازه‌یِ سطح و شکلِ مرزِ آن پکش می‌تواند بیش‌تر و یا کم‌تر از 0.91 باشد. در واقع برایِ یک سطحِ محدود، حداقل یک مقیاسِ طول مثلِ L واردِ مسئله می‌شود. در این‌صورت σ به R/L بستگی خواهد داشت. در حدّ $R/L \to 0$ پکشِ بیشینه به 0.91 میل می‌کند.

برایِ فضایِ سه‌بُعدی هم می‌توانیم پکش را تعریف کینم. اگر بخواهیم فضا را با کره‌هایی یک‌سان پُر کنیم. می‌توان نشان داد پکشِ بیشینه حدودِ 74 درصد است[12]. اما اگر کره‌ها را به صورتِ تصادفی بریزیم پُرشدگی‌یِ فضا تقریباً 68 درصد است. اگر ظرفِ بزرگی را با تعدادی نخود پُر کنیم و ظرف را خوب تکان دهیم، حجمِ اشغال شده توسطِ نخودها تقریباً 68 درصد است. حالا اگر این نخودها را آرد کنیم و درونِ ظرف بریزیم ظرف باز هم تا همان ارتفاعِ قبلی پُر می‌شود. دلیلِ این مسئله این است که پکش کمیتی بی‌بُعد است و به اندازه‌یِ ذرات بستگی ندارد. اگر کره‌ها هم‌سان نباشند پکش بیش‌تر می‌شود. پکشِ ناشی از کره‌هایِ بزرگ‌تر همان 68 درصد است. اما کره‌هایِ کوچک‌تر فضایِ خالی‌یِ بین‌کره‌هایِ بزرگ‌تر را پُر می‌کنند و به این‌خاطر درصدِ پُرشدگی بیش‌تر می‌شود. راهی برایِ گرفتنِ ذراتِ معلق در آب، عبور دادنِ آب املاح‌دار از یک ظرفِ شنی است. برایِ این‌کار از مخلوطی از شن‌هایِ ریز و درشت استفاده می‌شود تا پکشِ شن‌ها بیش‌تر باشد و آب به آهستگی از ناحیه‌یِ شنی عبور کند.

مثالِ6) مستطیلی به ابعادِ a و b در نظر بگیرید. می‌خواهیم با استفاده از تحلیلِ ابعادی

[12]اولین بار کپلر ادعا کرد که پکشِ بیشینه برایِ تعدادی کره‌یِ مشابه حدودِ 74 درصد است. به این‌خاطر به آن حدسِ کپلر هم می‌گویند. در سالِ 1998 بالاخره این حدس اثبات شد.

مساحتِ آن، S، را بر حسبِ a و b به دست آوریم.

کمیت‌هایِ بی‌بُعدِ مسئله $\Pi_1 := a/b$، $\Pi_2 := S/(ab)$، $\Pi_3 := S/a^2$، و $\Pi_4 := S/b^2$ هستند. از این چهار کمیتِ بی‌بُعد، دو تا مستقل هستند. وقتی می‌گوییم دو تا مستقل‌اند یعنی این‌که کمیت‌هایِ بی‌بُعدِ دیگر را می‌توانیم به صورتِ تابعی از این دو تا بنویسیم. مثلاً می‌توانیم دو تایِ مستقل را $\Pi_1 := a/b$، و $\Pi_2 := S/(ab)$ بگیریم. در این صورت $\Pi_3 = \Pi_2/\Pi_1$، و $\Pi_4 = \Pi_1\Pi_2$. تحلیلِ ابعادی می‌گوید این دو کمیتِ بی‌بُعد باید با هم مربوط باشند. با استفاده از (9) می‌توان نتیجه گرفت که

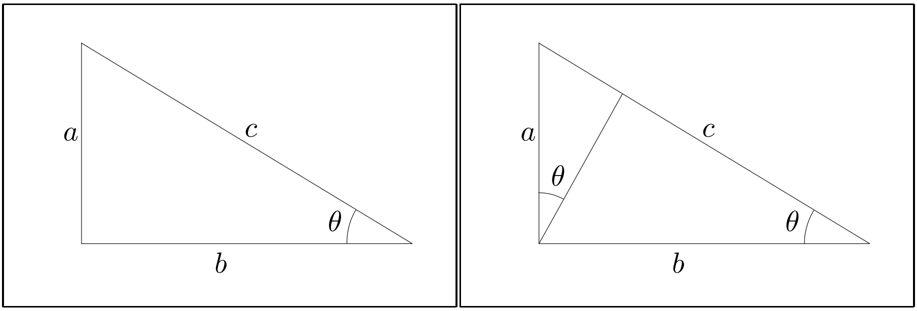
$$\Pi_2 = f(\Pi_1) \quad \Rightarrow \quad S = ab f(a/b). \tag{14}$$

تحلیلِ ابعادی چیزِ بیش‌تری نمی‌تواند بگوید. حالا باید از چیزهایِ دیگری که در موردِ مساحت می‌دانیم، استفاده کنیم. ما می‌دانیم که مساحت کمیتی جمع‌پذیر است، یعنی مساحتِ مستطیلی به ابعادِ $2a$، و b که از کنارِ هم‌گذاشتنِ دو مستطیل به ابعادِ a، و b ساخته می‌شود برابر با جمعِ مساحتِ آن دو است. حالا بیایید جمع‌پذیری‌یِ مساحت را به تحلیلِ ابعادی اضافه کنیم. اگر a یا b را α برابر کنیم، مساحتِ مستطیل α برابر می‌شود. از تعمیمِ این قضیه نتیجه می‌شود $\alpha S = \alpha ab f(\alpha a/b)$. از مقایسه این رابطه با (14) نتیجه می‌شود

$$f(\alpha x) = f(x). \tag{15}$$

برایِ به دست آوردنِ تابعِ f، کافی است α را برابر با x^{-1} انتخاب کنیم. در این صورت $f(x) = f(1)$. پس جوابِ این معادله $f(x) = C$ است، که C مقداری ثابت است. تحلیلِ ابعادی چیزِ بیش‌تری در موردِ اندازه‌یِ C نمی‌گوید. پس $S = Cab$.

مثالِ7) در این مثال می‌خواهیم قضیه‌یِ فیثاغورث را با استفاده از تحلیلِ اَبعادی اثبات کنیم. می‌دانیم یک مثلثِ قائم‌الزاویه، با طولِ وتر a و اندازه‌یِ یک زاویه‌ی حادّه‌یِ



شکل ۱—۳: اثباتِ قضیه‌یِ فیثاغورث با استفاده از تحلیلِ ابعادی.

آن، θ، به طورِ یک‌تا مشخص می‌شود. پس مساحت مثلث، S، با داشتنِ a و θ به طورِ یک‌تا تعیین می‌شود. دو کمیتِ بی‌بُعد داریم، θ و S/a^2، که طبق رابطه‌یِ زیر به هم مربوط‌اَند.

$$S/a^2 = f(\theta) \quad \Rightarrow \quad S = a^2 f(\theta). \tag{16}$$

تحلیلِ ابعادی هیچ اطلاعی در موردِ تابعِ $f(\theta)$ به ما نمی‌دهد. حالا اگر ارتفاعِ مثلث را بکشیم، سه مثلثِ قائم‌الزاویه با وترهایِ a، b و c و با زاویه‌یِ حادّه‌یِ θ داریم. مساحتِ این مثلث‌ها را S_1، S_2 و S_3 می‌نامیم. در این صورت $S_1 = a^2\, f(\theta)$،$S_2 = b^2\, f(\theta)$ و $S_3 = c^2\, f(\theta)$. حال اگر علاوه بر تحلیلِ اَبعادی، از جمع‌پذیریِ مساحت‌ها هم استفاده کنیم، به رابطه‌یِ زیر می‌رسیم.

$$S_1 = S_2 + S_3, \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2. \tag{17}$$

یکی دیگر از استفاده‌هایِ تحلیلِ ابعادی مدل‌سازی و یا تشابه است. حتماً صحنه‌هایی از فیلم‌هایی را به یاد دارید که مثلاً شعله‌یِ آتشی و یا موج و توفانی و یا غرق شدنِ یک کشتی را نشان می‌دهد ولی کاملاً تصنعی به نظر می‌رسد. یا بر عکس

فیلم‌هایی را دیده‌ایم که چنین صحنه‌هایی خیلی واقعی هستند. چرا اولی تصنعی و دومی واقعی بود؟ لابد فکر نمی‌کنید در آن فیلم‌هایی که واقعی به نظر می‌رسند، یک کشتیِ واقعی غرق می‌شود. امواجی که از غرق شدنِ یک کشتی‌یِ واقعی ایجاد می‌شوند و یا شعله‌هایِ ناشی از سوختن یک آسمان‌خراش با امواجِ اطراف یک قایقِ کوچک و شعله‌هایِ ناشی از سوختنِ یک ساختمانِ مقوایی کاملاً قابلِ تشخیص‌اند. برایِ آن‌که مسئله واقعی به نظر برسد لازم است که اگر با قایق کوچک‌تری کار می‌کنیم، شاره را هم عوض کنیم. مثلاً از شاره‌ای که چگالی، و گران‌روی‌اش با چگالی، و گران‌روی‌یِ آب فرق دارد استفاده کنیم. در این‌صورت اگر مثلاً موج‌هایی که در اثرِ غرق‌شدنِ قایق به‌وجود می‌آیند نسبت به ابعادِ قایق همانِ نسبتِ ابعادِ موج‌هایِ واقعی به ابعادِ کشتی‌یِ اصلی باشد تصویری که ارائه می‌شود واقعی به نظر می‌رسد.

گاهی اوقات وقتی قرار است پولِ هنگفتی صرف ساختنِ وسیله‌ای شود، ابتدا مدلی کوچک‌تر ساخته می‌شود و آزمایش‌هایی رویِ این مدلِ کوچک صورت می‌گیرد. با این آزمایش‌ها اطلاعاتی در موردِ سیستمِ بزرگ به دست می‌آید. فرض کنید در سیستمِ اصلی کمیت‌هایِ بی‌بُعد $\Pi_1,\cdots,\Pi_N$ باشند. اگر چه ممکن است ما دقیقاً نتوانیم مسئله‌یِ اصلی را مستقیماً تحلیل کنیم، ولی از بحث‌هایِ قبلی واضح است که

$$\Pi_1 = F(\Pi_2,\cdots,\Pi_N). \tag{18}$$

سیستمی شبیهِ سیستم اصلی ولی در ابعادی کوچکتر می‌سازیم. فیزیکِ حاکم بر هر دو سیستم یکی است، بنا بر این هر چند تابعِ F را نمی‌شناسیم برایِ سیستمِ مدل هم داریم

$$\Pi_{1m} = F(\Pi_{2m},\cdots,\Pi_{Nm}), \tag{19}$$

که Π_{im}، i اُمین کمیتِ بی‌بُعدِ مدل است. چون رویِ سیستمِ مدل کنترلِ بیش‌تری داریم مدل را جوری می‌سازیم که

$$\Pi_{2m}=\Pi_2, \cdots, \Pi_{Nm}=\Pi_N. \tag{20}$$

پس سمتِ راستِ روابطِ (18) و (19) یکی می‌شوند. در نتیجه سمتِ چپِ آن‌ها هم باید یکی باشند. با اندازه‌گیریِ Π_{1m} در واقع مثلِ آن است که Π_1 را اندازه گرفته باشیم.

مثالِ8) صفحه‌یِ مستطیل‌شکلی با ابعادِ l و l' را درونِ شاره‌ای گذاشته‌ایم. سرعتِ شاره در فاصله‌ی دور عمود بر صفحه است و اندازه‌یِ آن v با بُعدِ LT^{-1} است. چگالی‌یِ شاره ρ و گران‌روی‌یِ آن μ[13] است. بُعدِ چگالی‌یِ شاره ρ، ML^{-3} است که M بُعدِ جرم است. فرض کنید نیرویی که از طرفِ شاره بر مستطیل وارد می‌شود به پارامترهایِ μ، ρ، l'، l، و v بستگی دارد. بُعدِ نیرو MLT^{-2} است.

برایِ به دست آوردنِ این نیرو، مدل را مستطیلی با ابعادِ l_0 و l'_0 می‌گیریم و آن‌را در معرضِ شاره‌یِ دیگری که سرعت‌اش v است قرار می‌دهیم. ابعادِ مدل 100 برابر کوچک‌تر از مستطیلِ اصلی است. چگالی‌یِ شاره‌یِ دوم $\rho_0=10\rho$، و گران‌روی‌یِ آن $\mu_0=0.1\mu$ است. نیرویِ وارد بر مستطیلِ مدل F_0 شده است. نیرویِ وارد بر مستطیلِ بزرگ چه‌قدر است؟

برایِ به دست آوردنِ نیرویِ وارد بر مستطیل لازم است کمیت‌هایِ فیزیکیِ دخیل در مسأله را در نظر بگیریم. آن‌ها عبارت‌اَند از μ، ρ، v، l'، l، و F. حال از این کمیت‌ها کمیتی بی‌بُعد مثلِ Π می‌سازیم.

$$\Pi := F^a\, l^b\, l'^{b'}\, v^c\, \rho^d\, \mu^e.$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که کمیتِ زیر باید بی‌بُعد باشد.

[13] گران‌روی پارامتری از شاره است که جلویِ تغییرِ سرعتِ لایه‌هایِ شاره نسبت به هم را می‌گیرد. مثلاً گران‌روی‌یِ عسل بیش‌تر از گران‌روی‌یِ نفت است. بُعدِ گران‌روی $[\mu]=\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$ است.

$$M^{a+d+e}\, L^{a+b+b'+c-3d-e}\, T^{-2a-c-e},$$

که این به معنای صفر بودنِ نماهاست. که از این جا

$$d = -a - e, \quad c = -2a - e, \quad b = -(2a+e) - b'.$$

سه پارامترِ مستقل داریم. در این‌جا a، b' و e را به عنوانِ پارامترهایِ مستقل گرفته‌ایم. از این‌ها نتیجه می‌شود که

$$\Pi := \left(\frac{F}{\rho v^2 l^2}\right)^a \left(\frac{l'}{l}\right)^{b'} \left(\frac{\mu}{\rho v l}\right)^e,$$

به ازایِ همه‌یِ مقادیرِ a، b' و e بی‌بُعد است. با صفر گذاشتن دو تا از این پارامترها و این‌که پارامترِ سوم برابر با 1 باشد، سه کمیتِ بی‌بُعدِ $\Pi_1 := F/(\rho v^2 l^2)$، $\Pi_2 := \mu/(\rho v l)$، و $\Pi_3 := l'/l$ را به دست می‌آوریم. با انتخابِ پارامترهایِ دیگر به عنوانِ پارامترِ مستقل، کمیت‌هایِ بی‌بُعدِ دیگری به دست می‌آیند، که البته توابعی از Π_1، Π_2 و Π_3 هستند. رابطه‌یِ فیزیکی‌یِ نهایی باید رابطه‌ای بینِ کمیت‌هایِ بی‌بُعد باشد، پس

$$\frac{F}{\rho v^2 l^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho v l}, \frac{l'}{l}\right). \tag{21}$$

برایِ مستطیلِ مدل هم داریم

$$\frac{F_0}{\rho_0 v_0^2 l_0^2} = f\left(\frac{\mu_0}{\rho_0 v_0 l_0}, \frac{l'_0}{l_0}\right). \tag{22}$$

اما با توجه به این که $l = 100 l_0$، $l' = 100 l'_0$، $\rho = 10^{-1}\rho_0$، $v = v_0$، و $\mu = 10\mu_0$

$$\frac{\mu}{\rho v l} = \frac{\mu_0}{\rho_0 v_0 l_0}, \qquad \frac{l'}{l} = \frac{l'_0}{l_0}. \tag{23}$$

چون سمت راستِ روابطِ (21) و (22) یکی است، پس سمتِ چپِ آن‌ها هم باید مساوی باشد. بنا بر این

$$\frac{F}{\rho v^2 l^2} = \frac{F_0}{\rho_0 v_0^2 l_0^2}, \tag{24}$$

که با جای‌گذاری خواهیم داشت:

$$F = 10^3\, F_0. \tag{25}$$

۱—۳ تقریب زدن، و بررسیِ رفتارِ حدّی

تعدادِ مسائلی در فیزیک که می‌توان به دقت حل کرد نسبت به کلِ مسائلِ فیزیک بسیار کم و تقریباً صفر است. اما نباید نااُمید شد. یکی از مهم‌ترین ابزارهایِ فیزیک‌پیشه‌ها استفاده از روش‌هایِ تقریبی است. خیلی اوقات با مسائلی روبه‌رو می‌شویم که به تقریب شبیهِ مسئله‌یِ دیگری هستند که قابلِ حل‌اند. برایِ حلِ این مسائل از روش‌هایِ تقریبی استفاده می‌کنیم. این امر مستلزم آشنایی با روش‌هایِ تقریب‌زدنِ یک تابع است. بسطِ زیر بسطِ تابعِ $f(x)$ حولِ نقطه‌یِ x_0 است

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + C_n(x_0)(x-x_0)^n + \cdots, \end{aligned} \tag{26}$$

که C_1، C_2، و $\cdots$ مقادیرِ ثابتی هستند. در صورتی که x خیلی به x_0 نزدیک و $x-x_0$ خیلی کوچک باشد[14] جمله‌هایِ شاملِ توان‌هایِ بالایِ $x-x_0$ ممکن است خیلی کوچک شوند. در این صورت به جای یک سری شاملِ بی‌نهایت جمله گاهی از یک چند جمله‌ای که همان چند جمله‌یِ اولِ بسط است به عنوانِ تقریبی از اندازه‌یِ تابع استفاده می‌شود. بسطِ چند تابع حولِ $x_0=0$ به صورتِ زیر است.

$$\begin{aligned}
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\\
\mathrm{e}^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\\
(1+x)^k &= 1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{k!}{n!(k-n)!}x^n+\cdots,\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots. \qquad (27)
\end{aligned}$$

این بسط‌ها بسطِ تیلور هستند[15]. برایِ دو بسطِ آخر باید شرطِ $|x|<1$ برقرار باشد. از تعریفِ بسطِ تیلور ضرایبِ ثابت را می‌توان به دست آورد[16]. اگر بخواهیم معادلاتِ

[14] باید حواسِ‌مان باشد که وقتی صحبت از کوچک بودنِ کمیتی می کنیم یا باید آن کمیت بی‌بُعد باشد یا آن‌که کمیتِ دیگری با همان بُعد وجود داشته باشد که کوچک بودن معنا داشته باشد.

[15] برایِ کسانی که با مشتق‌گیری آشنا هستند ممکن است تعریفِ زیر برایِ بسطِ تیلور مفید باشد. می‌گوییم تابعِ $f(x)$ در نقطه‌یِ x_0 تحلیلی است اگر بتوانیم بسطِ زیر را برایِ آن بنویسیم

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2\\
&\quad +\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots,
\end{aligned}$$

که $f^{(n)}(x_0)$ مشتقِ nاُم $f(x)$ در نقطه‌یِ x_0 است. به این بسط بسطِ تیلورِ $f(x)$ حولِ نقطه‌یِ x_0 می‌گوییم.

[16] بیایید تک‌تکِ جمله‌هایِ مربوط به بسطِ اولِ (27) را به دست آوریم.

$$\sin x\Big|_{x=0}=0,$$

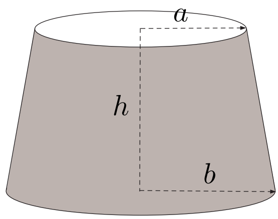
(27) را برایِ x هایِ کوچک $(x \ll 1)$ ساده کنیم، باید بدانیم تا چه حد خطا مجاز است. فرض کنید جمله‌یِ x^3 و توان‌هایِ بالاترِ آن را دور بریزیم. در این صورت می‌گوییم معادلاتِ (27) تا رتبه‌یِ x^2 عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}
&\sin x \approx x, \\
&\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}, \\
&e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}, \\
&(1+x)^k \approx 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 \\
&\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2.
\end{aligned} \tag{28}$$

مثالِ9) معادله‌یِ $x^2 = 1 + \epsilon$، $(\epsilon \ll 1)$ را در نظر بگیرید. جوابِ این معادله عبارت است از

$$\begin{aligned}
x &= \pm(1+\epsilon)^{1/2} \\
&\approx \pm(1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2!}(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\epsilon^2 + \cdots) \\
&\approx \pm(1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \cdots).
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\sin x\Big|_{x=0} = \cos x\Big|_{x=0} = 1, \\
&\frac{d^2}{dx^2}\sin x\Big|_{x=0} = -\sin x\Big|_{x=0} = 0, \\
&\frac{d^3}{dx^3}\sin x\Big|_{x=0} = -\cos x\Big|_{x=0} = -1, \quad \cdots
\end{aligned}$$



شکل ۱—۴: استوانه و مخروط حالت‌هایِ حدّیِ مخروطِ ناقص هستند.

ϵ را 0.01 بگیریم. $x^2 = 1.01$ و جذرِ آن تا هشت رقمِ معنی‌دار $x = 1.0049875$ می‌شود. با استفاده از بسطِ تیلور تا رتبه‌یِ دومِ ϵ، به همین جواب می‌رسیم.

گاهی اوقات لازم است برایِ رسیدنِ به نتیجه، محاسبه‌یِ مفصلی انجام دهیم. یک راهِ بررسیِ درستی جوابی که به دست آورده‌ایم، بررسیِ رفتارهایِ حدّیِ جواب است.

مثالِ10) مخروطِ ناقصی مطابقِ شکل در نظر بگیرید. بدونِ حلِّ تحلیلیِ مسئله و صرفاً با استفاده از رفتارهای حدّی کدام یک از مقادیرِ زیر حجمِ مخروطِ ناقص است.

۱) $\frac{\pi h}{3}(a^2+b^2)$

۲) $\frac{\pi h}{2}(a^2+b^2)$

۳) $\frac{\pi h}{3}(a^2+ab+b^2)$

۴) $\frac{\pi h}{3}\cdot\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}$

۵) πhab

می‌دانیم حجمِ مخروطی به ارتفاعِ h و شعاعِ قاعده‌یِ c، $\frac{\pi c^2 h}{3}$ و حجمِ استوانه‌ای به ارتفاعِ h، و شعاعِ قاعده‌یِ d، $\pi d^2 h$ است. در صورتی که a و یا b صفر شوند مخروطِ ناقص به مخروطِ کامل تبدیل می‌شود و معادله‌ای که برایِ حجمِ آن داریم باید به معادله‌یِ حجمِ مخروط تبدیل شوند. گزینه‌هایِ ۲)، و ۵) این خاصیت را ندارند. در حدّی که $a = b$ شود معادله‌ای که برایِ حجمِ مخروطِ ناقص داریم باید به معادله‌یِ حجمِ استوانه تبدیل شود. گزینه‌هایِ ۱)، و ۴) این خاصیت را ندارند، ولی گزینه‌یِ ۳) این خاصیت را دارد. این نوع استدلال تضمین نمی‌کند که جوابی که رفتارهایِ حدی را برآورده می‌کند حتماً درست است بل‌که می‌گوید آن جواب‌هایی که این خاصیت را ندارند حتماً غلط هستند. در بخش‌هایِ بعد که با کمیت‌هایِ مکانیکی آشنا شدیم مثال‌هایی از بررسی‌یِ رفتارهایِ حدّی‌یِ چنین سیستم‌هایی را خواهیم دید.

۱—۴ مسائل

مسئله‌یِ1) برگه‌های کاغذی که برایِ کپی کردن استفاده می‌شود معمولاً از نوعِ " 80گرمی " است؛ یعنی جرمِ ورقه‌ای به مساحتِ $1\ \mathrm{m}^2$ از آن $80\ \mathrm{g}$ است. اگر برگه A4 باشد (به ابعادِ $297\ \mathrm{mm} \times 210\ \mathrm{mm}$) جرمِ آن به کدام نزدیک‌تر است؟

الف) $4\ \mathrm{g}$ ب) $5\ \mathrm{g}$ ج) $8\ \mathrm{g}$ د) $10\ \mathrm{g}$

مسئله‌یِ2) ضخامتِ برگه‌ی کاغذی که این سئوال رویِ آن نوشته شده به کدام نزدیک‌تر است؟

الف) $10^{-3}\ \mathrm{m}$ ب) $10^{-4}\ \mathrm{m}$ ج) $10^{-3}\ \mathrm{cm}$ د) $10^{-4}\ \mathrm{cm}$

مسئله‌یِ3) مساحتِ ناخنِ انگشتِ اشاره‌یِ شما به کدام نزدیک‌تر است؟

الف) $10\ \mathrm{mm}^2$ ب) $10\ \mathrm{cm}^2$ ج) $10^{-4}\ \mathrm{m}^2$ د) $10^{-3}\ \mathrm{m}^2$

مسئله‌یِ4) یک گلوله‌یِ نخِ کاموا شعاعش $10\ \mathrm{cm}$ است. اگر قطرِ نخ $2\ \mathrm{mm}$ باشد، و فرض کنیم که گلوله طوری بسته شده است که فضایِ خالی‌یِ بینِ نخ‌هایِ کاموا 30

درصدِ حجمِ گلوله‌یِ نخ باشد طولِ نخِ کاموا از چه مرتبه‌ای است؟

مسئله‌یِ5) در طیِ یک مسابقه‌یِ فوتبال بازی‌کنان مقدارِ زیادی عرق می‌کنند. مقدارِ که یک بازی‌کن عرق کرده است تقریباً معادل است با لایه‌ای از عرق به ضخامتِ متوسطِ $1\ \mathrm{mm}$ رویِ بدنِ او. اگر جرم‌حجمی‌یِ عرق را $1\ \mathrm{g/cm^3}$ فرض کنیم، او تقریباً چه‌قدر عرقِ کرده است؟ راه‌نمایی: می‌توانید بدنِ شخص را با مکعب‌مستطیلی به ابعادِ $180\ \mathrm{cm} \times 50\ \mathrm{cm} \times 10\ \mathrm{cm}$ همانند کنید.

الف) $20\ \mathrm{g}$ ب) $200\ \mathrm{g}$ ج) $2000\ \mathrm{g}$ د) $20000\ \mathrm{g}$

مسئله‌یِ6) برای تولیدِ $1\ \mathrm{kg}$ گندم به یک تُن، یعنی $1000\,\mathrm{kg}$ آب نیاز است. بارشِ سالانه‌یِ منطقه‌ای $100\ \mathrm{mm}$ است، به این معنی که اگر تمامِ برف و بارانِ سالانه‌یِ آن منطقه را در منطقه‌ای به همان مساحت بریزیم ارتفاعِ آن $100\ \mathrm{mm}$ می‌شود. در این ناحیه حداکثر محصولِ کشت دیمِ گندم چند تن بر هکتار است؟ (هکتار یعنی $10^4\ \mathrm{m}^2$).

الف) 0.1 ب) 1 ج) 10 د) 100

مسئله‌یِ7) جسمی درونِ سیلالی حرکت می‌کند. نیرویِ مقاومتی که از طرفِ سیال به آن وارد می‌شود ممکن است به شکلِ $K\,v^2$ باشد، که K یک ثابت و v اندازه‌ی سرعتِ جسم است. بُعدِ سرعت LT^{-1} و بُعدِ نیرو MLT^{-2} است. بُعدِ K کدام است؟

الف) $\mathrm{M\,L^{-2}\,T}$ ب) $\mathrm{M\,L^{-2}\,T^{-1}}$ ج) $\mathrm{M\,L^{-1}}$ د) $\mathrm{M\,L}$

مسئله‌یِ8) جسمی از حالتِ سکون در سیالی که در سوالِ قبل نیرویِ مقاومتِ آن داده شد سقوط می‌کند. جرمِ جسم را m و شتابِ گرانش را g بگیرید. بُعدِ شتاب LT^{-2} است. می‌توان نشان داد پس از مدتی سرعتِ ذره تقریباً ثابت می‌شود. به این سرعت، سرعتِ حد گفته می‌شود. زمانِ لازم برایِ این که سرعتِ جسم به سرعتِ حدی نزدیک شود کدام عبارت می‌تواند باشد؟ c یک ثابتِ بدونِ بُعد است.

الف) $c\left(\frac{mg}{K}\right)^{1/2}$ ب) $c\left(\frac{m}{Kg}\right)^{1/2}$ ج) $c\left(\frac{m}{Kg^2}\right)^{1/3}$ ج) $c\left(\frac{m}{K^2g}\right)^{1/3}$

مسئله‌یِ9) حشرات موادِ غذایی را از طریقِ سطحِ پوستِ‌شان جذب می‌کنند. حشرات را تقریباً به شکلِ کره بگیرید. بیش‌ترین مقدارِ غذایی که در واحدِ زمان از طریقِ واحدِ

سطحِ پوست می‌توانند جذب می‌کنند α، و کم‌ترین مقدارِ غذایِ لازم در واحدِ زمان برایِ واحدِ حجمِ یک حشره برایِ آن‌که زنده بماند، β است. بزرگ‌ترین حشره‌یِ تقریباً کروی شعاعش تقریباً چه‌قدر است؟

مسئله‌یِ10) توپی با سرعتِ اولیه‌یِ v_0 به طورِ عمودی به بالا پرتاب می‌شود. شتابِ گرانش g است. بُعدِ سرعت LT^{-1} و بُعدِ شتاب LT^{-2} است. بیشینه ارتفاعی که گلوله بالا می‌رود تابعی از سرعتِ اولیه و شتابِ گرانش است. با تحلیلِ ابعادی چه اطلاعی در موردِ بسته‌گی‌یِ بیشینه ارتفاع به سرعتِ اولیه و شتابِ گرانش به دست می‌آید؟ با تحلیلِ ابعادی چه اطلاعی در موردِ بسته‌گی‌یِ زمانِ رفت‌وبرگشت توپ به سرعتِ اولیه و شتابِ گرانش به دست می‌آید؟

مسئله‌یِ11) برایِ آن که جسمی به جرمِ m رویِ دایره‌ای به شعاعِ R با سرعتِ ثابتِ v حرکت کند، نیرویِ F لازم است. با تحلیلِ ابعادی چه اطلاعی در موردِ بسته‌گی‌یِ F به جرمِ ذره، سرعتِ ذره، و شعاعِ مدارِ دایره‌ای به دست می‌آید؟

مسئله‌یِ12) هر فنر با یک پارامترِ k که ضریبِ سختی است و بُعدِ آن $[k] = MT^{-2}$ است، مشخص می‌شود. جسمی به جرمِ M را به این فنر می‌بندیم و اجازه می‌دهیم که رویِ یک سطحِ افقی نوسان کند. با استفاده از تحلیلِ ابعادی چه نتیجه‌ای در موردِ دوره‌یِ نوسان یعنی زمانی که جسم یک نوسان انجام می‌دهد می‌توان به دست آورد؟

مسئله‌یِ13) بر اساس مشاهده، این واقعیت‌های تقریبی در مورد پستانداران دیده شده. تعدادِ ضربانِ قلبِ همه‌یِ پستانداران طی عمرشان یک‌سان است. تعدادِ ضربان بر زمان با توانِ مصرف‌شده بر جرم متناسب است. توانی که یک پستاندار مصرف می‌کند با جرم آن به توانِ $\frac{3}{4}$ متناسب است. جرمِ والِ آبی 200 تن و جرمِ یک پستان‌دارِ بسیار کوچک 2 گرم است. نسبتِ عمرِ والِ آبی به عمرِ آن پستان‌دارِ کوچک کدام است؟

الف) 0.01 ب) 0.1 ج) 1 د) 10 ه) 100 و) 1000

مسئله‌یِ14) جسمی از ارتفاعِ h رها می‌شود. اگر از مقاومتِ هوا چشم‌پوشی شود مکانِ آن از رابطه‌یِ $z = h - \frac{1}{2}gt^2$ و سرعتِ آن از رابطه‌یِ $v = -gt$ به دست می‌آید که t

زمان و g شتابِ ثقل و مقداری ثابت است. اگر مقاومتِ هوا را هم در نظر بگیریم مکان و سرعتِ جسم از روابطِ

$$z = h - \frac{gt}{\alpha} + \frac{g}{\alpha^2}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}),$$
$$v = -\frac{g}{\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}). \tag{30}$$

به دست می‌آیند. α پارامتری با بُعدِ T^{-1} است که قدرتِ مقاومتِ هوا را نشان می‌دهد.

الف) نشان دهید درحدِّ زمان‌هایِ کوچک، یا به زبانِ دقیق‌تر $t \ll 1/\alpha$، به همان رابطه‌یِ قبلی برایِ مکان و سرعتِ جسم می‌رسیم.

ب) درحدِّ زمان‌هایِ بزرگ، یا $t \gg 1/\alpha$، مکان و سرعتِ جسم تقریباً از چه رابطه‌ای به دست می‌آیند.

مسئله‌یِ15) نیرویِ گرانش بینِ دو ذره به جرم‌هایِ m_1 و m_2 عبارت است از

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}. \tag{31}$$

فاصله‌یِ زمین و خورشید را r و شعاعِ زمین را R بگیرید. نسبتِ این دو $R/r \ll 1$ است. جسمی را رویِ سطحِ زمین و رویِ خطِ واصلِ مرکزهایِ خورشید و زمین در نظر بگیرید. این جسم را یک‌بار بینِ زمین و خورشید و یک بار سمتِ دیگرِ زمین در نظر بگیرید. نشان دهید که تا اولین مرتبه‌یِ تقریب نسبتِ نیرویی که خورشید به این جسم در دو حالتِ مختلف وارد می‌کند عبارت است از

$$\frac{F_1}{F_2} = 1 - \frac{4R}{r}. \tag{32}$$

مقدارِ عددیِ این نسبت را هم به دست آورید.[17]

[17] دلیلِ جذر و مد همین اختلافِ بینِ نیرویِ گرانش در دو سمتِ زمین است. در محاسبه‌یِ دقیق‌تر اثرِ نیرویِ گرانشِ ماه که اتفاقاً بیش‌تر هم هست را نیز باید در نظر بگیریم.

مسئله‌یِ16) بسطِ تابع‌هایِ $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ را برایِ $\varphi\approx\pi/2$ به دست آورید.

مسئله‌یِ17) نیرویی که دو بارِ الکتریکی‌یِ q و Q به هم وارد می‌کنند

$$F=\frac{KqQ}{r^2}. \tag{33}$$

است. اگر دو بار هم علامت باشند این نیرو دافعه و در غیرِ این‌صورت جاذبه است. دو بارِ یک‌سانِ q در فاصله‌یِ 2ℓ از هم هستند. بارِ Q درست در وسطِ خطِ واصلِ دو بار قرار دارد. بارِ Q را رویِ این خط به اندازه‌یِ $\epsilon\ell$ منحرف می‌کنیم. اگر $\epsilon\ll 1$ باشد اندازه‌یِ نیرویِ الکتریکی‌یِ وارد به بارِ Q تا مرتبه‌یِ ϵ^2 چه‌قدر است؟

فصل ۲

سینماتیک

برایِ آن‌که یک نقطه را در یک فضایِ سه بعدی مشخص کنیم ابتدا باید یک چارچوب انتخاب کنیم. به این چارچوب، چارچوبِ مرجع می‌گوییم. مکانِ هر نقطه در این چارچوب را با سه مختصه که مؤلفه‌هایِ x، y، و z بردارِ مکانِ آن نقطه $\mathbf{r}$ هستند، نشان می‌دهیم. برایِ آن‌که مکانِ یک جسم را معین کنیم تنها تعیینِ مکانِ یک نقطه از آن کافی نیست، زیرا ممکن است جسم حولِ آن نقطه بچرخد، یا آن‌که جسم شکلِ معینی نداشته باشد و حینِ حرکت شکلش عوض شود. برایِ اجتناب از پیچیدگی‌هایی از این نوع، فرض می‌کنیم چرخیدنِ متحرکِ موردِ نظرِ ما و جهت‌گیری‌هایِ مختلفش نسبت به چارچوبِ مرجع، از نظرِ ما مهم نیست. در ضمن از تغییرِ شکلِ جسم هم صرفِ نظر می‌کنیم. در مکانیک به آن‌چه با این فرض‌ها از جسم می‌ماند معمولاً ذره[1] گفته می‌شود. وقتی از حرکتِ یک ذره حرف می‌زنیم منظورِمان حرکتِ جسم است وقتی که از دوران و تغییرِ شکلِ آن صرفِ نظر کرده‌ایم. در صورتی که ذره حرکت کند علی‌الاصول این مختصه‌ها با زمان عوض می‌شوند، که آن را مثلاً با $x(t)$، $y(t)$، $z(t)$، یا به طورِ کلی بردارِ مکان آن را با $\mathbf{r}(t)$ نمایش می‌دهیم. برایِ آن‌که اطلاعاتی در موردِ

---

[1] particle

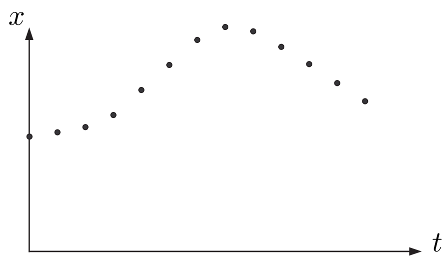
حرکتِ جسم به دست آوریم می‌توانیم مثلاً هر ثانیه یک‌بار مکانِ متحرک را اندازه بگیریم. نتایجِ این اندازه‌گیری را در جدولی به شکلِ زیر می‌توانیم ثبت کنیم. زمان‌ها بر حسبِ ثانیه (s) و طول‌ها بر حسبِ سانتی‌متر (cm) هستند.

s / cm	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
$x(t)$	0.0	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5
$y(t)$	0.0	1.5	3.0	3.0	4.5	6.0
$z(t)$	0.0	0.5	2.0	4.5	8.0	12.5

هر کدام از این ستون‌ها مربوط به مکانِ ذره در یک لحظه‌یِ معین است، پس هر ستون متناظر با یک نقطه از مسیرِ ذره است. مسیرِ ذره از همه‌یِ این نقطه‌ها می‌گذرد. هر چه تعدادِ اندازه‌گیری‌ها بیش‌تر و اندازه‌گیری‌ها دقیق‌تر باشد، این نقطه‌ها به هم نزدیک‌تر می‌شوند و راحت‌تر می‌توانیم یک خط از آن‌ها عبور دهیم و در نتیجه این خط یا مسیری که به دست می آوریم به مسیرِ واقعی‌یِ ذره نزدیک‌تر است. بدیهی است که این اعداد دقتی دارند و هم‌راه با خطا هستند. در بخشِ بعد می‌خواهیم به حرکتِ یک جسم بپردازیم. بیایید ابتدا خودمان را به مسئله‌یِ یک‌بعدی و حرکتِ متحرک رویِ خطِ راست محدود کنیم.

۲—۱ حرکتِ یک بعدی

ذره‌ای را در نظر بگیرید که رویِ یک خطِ راست حرکت می‌کند. این ذره گاهی تندتر و گاهی آهسته‌تر حرکت می‌کند. گاهی ممکن است به جلو برود یا ممکن است به عقب برگردد. زمان‌هایی هم ممکن است که ذره ساکن باشد. این اطلاعات را می‌توانیم در جدولی از اعداد که مکانِ ذره را در زمان‌هایِ مختلف می‌دهد جمع آوری کنیم. دستگاهِ



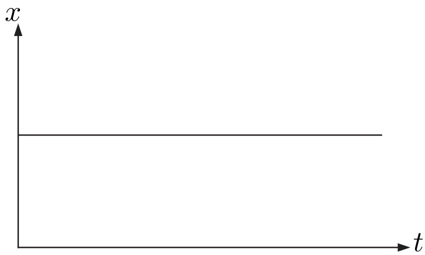
شکل ۲—۱: اندازه‌گیری مکانِ یک متحرک در چند زمانِ مختلف.

مختصاتی را در نظر بگیرید که یک مختصه‌اش زمان و دیگری مکانِ ذره باشد. جدولِ اعدادی که در اندازه‌گیری به دست می‌آوریم هر کدام متناظر با یک نقطه در این دستگاهِ مختصات است. با اندازه‌گیری‌هایِ بیش‌تر اطلاعاتِ بیش‌تری در موردِ حرکتِ ذره به دست می‌آوریم. می‌توانیم این اطلاعات را در یک منحنی که منحنیِ مکان—زمان $(x-t)$ است خلاصه کنیم. این اطلاعات وقتی کامل است که مکانِ ذره را در تمامِ زمان‌ها داشته باشیم، یعنی مکان را به عنوانِ تابعی از زمان، مثلاً به صورتِ تابعی مثلِ $x(t)$ داشته باشیم. مجموعه‌ای از داده‌هایِ مکان—زمان در شکلِ (۲—۱) خلاصه شده‌اند.

توجه داشته باشید که حرکت یک‌بعدی و مسیرِ ذره خطی راست است، ولی تغییراتِ مکان بر حسبِ زمان می‌تواند یک منحنی باشد.

بیایید از ساده‌ترین حالت شروع کنیم. ذره‌ای که ساکن است مکان آن با گذشتِ زمان عوض نمی‌شود. منحنیِ مکان—زمانِ یک ذره‌یِ ساکن خطی موازیِ محورِ t است، شکلِ (۲—۲) را ببینید.

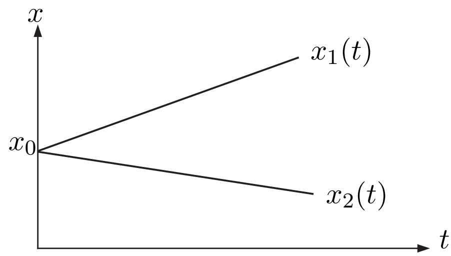
حالا بیایید ذره‌ای را در نظر بگیریم که متحرک است. مکانِ آن در زمانِ t، $x(t)$ و در زمانِ $t+\Delta t$، $x(t+\Delta t)$ است. بنا بر این در مدت‌زمانِ Δt به اندازه‌یِ $\Delta x := x(t+\Delta t) - x(t)$ جابه‌جا می‌شود. در این صورت سرعتِ متوسطِ این ذره با رابطه‌یِ



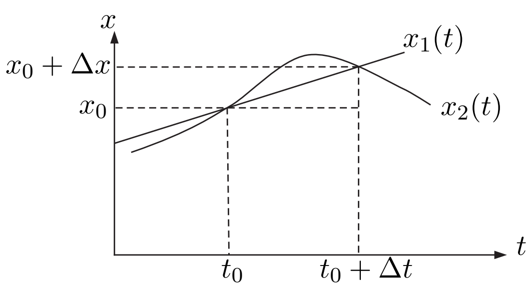
شکل ۲—۲: منحنیِ مکان—زمانِ یک ذره‌یِ ساکن.

$$\bar{v} := \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{1}$$

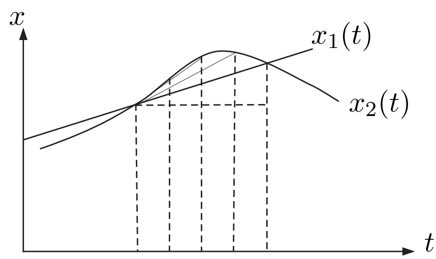
داده می‌شود. مطابقِ این تعریف سرعتِ متوسطِ یک ذره‌یِ ساکن صفر است، چون جابه‌جاییِ ذره صفر است. توجه داشته باشید که با انتخابِ جهتِ مثبتِ محورِ x علامتِ جابه‌جایی تعیین می‌شود. اگر جهتِ مثبتِ محورِ x را برعکس کنیم علامتِ جابه‌جایی عوض می‌شود و در این صورت علامتِ سرعتِ متوسط هم عوض می‌شود. ذره‌ای که در جهتِ منفی‌یِ محورِ x حرکت می‌کند جابه‌جایی‌اش منفی است و سرعتش منفی است. در شکلِ (۲—۳) منحنی‌یِ مکان—زمانِ دو متحرک که هر دویِ آن‌ها در زمانِ $t = 0$ در x_0 بوده‌اند را می‌بینیم. اگر سرعتِ متوسطِ این متحرک‌ها را در هر زمان و برایِ هر بازه‌یِ زمانی به دست آوریم، نتیجه یکی است. سرعتِ متوسطِ ذره‌یِ 1 ثابت و هم‌واره مثبت، سرعتِ متوسطِ ذره‌یِ 2 ثابت و هم‌واره منفی است. منحنی‌یِ مکان—زمانِ متحرکی که با سرعتِ ثابت حرکت می‌کند یک خطِ راست است. شکلِ (۲—۴) را به دقت نگاه کنید. در این شکل منحنی‌یِ مکان—زمانِ دو متحرک با $x_1(t)$، و $x_2(t)$ داده شده. چنان‌که می‌بینید جابه‌جایی‌یِ این دو متحرک برایِ زمانِ بینِ t_0 و $t_0 + \Delta t$، یکی و برابر با Δx است. با استفاده از تعریفِ (1) می‌بینیم که سرعتِ متوسطِ این دو متحرک برایِ این بازه‌یِ زمانی برابر است.



شکل ۲—۳: منحنی‌یِ مکان—زمانِ دو متحرک که سرعتِ‌شان ثابت و مکانِ اولیه‌یِ هر دو x_0 است. سرعتِ ذره‌یِ 1 مثبت، و سرعتِ ذره‌یِ 2 منفی است.



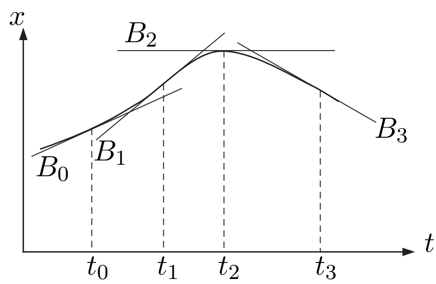
شکل ۲—۴: منحنی‌یِ مکان—زمانِ دو ذره‌یِ 1، و 2 که حرکتِ‌شان متفاوت است ولی سرعتِ متوسطِ‌شان بینِ t_0 و $t_0 + \Delta t$ یکی است.



شکل ۲—۵: سرعتِ لحظه‌ای همان سرعتِ متوسط است ولی برایِ فواصلِ زمانیِ بسیاربسیار کوچک.

اما با نگاهی به منحنیِ مکان—زمانِ دو متحرک واضح است که حرکتِ این دو متحرک واقعاً متفاوت است. همان‌طور که از شکل پیداست متحرکِ 1 هم واره رو به جلو رفته است یعنی با گذشتِ زمان xِ آن زیاد شده است. اما متحرکِ 2 مدتی x اش زیاد شده و مدتی هم xِ آن کم شده یعنی رو به عقب برگشته. برایِ آن‌که حرکتِ این دو متحرک را دقیق‌تر بررسی کنیم می‌توانیم سرعتِ متوسط آن‌ها را برایِ بازه‌هایِ زمانیِ دیگری بسنجیم. می‌بینیم که برایِ بازه‌هایِ زمانیِ دیگر، سرعتِ متوسطِ این دو متحرک متفاوت است. در واقع سرعتِ متوسطِ متحرکِ اول برایِ هر بازه‌یِ زمانیِ دل‌خواه یک‌سان است. در حالی که برایِ متحرکِ دوم سرعتِ متوسط به زمانِ ابتدا و انتهایِ بازه‌یِ زمانی بستگی دارد (شکلِ (۲—۵) را ببینید). پس سرعتِ متوسط در یک بازه‌یِ زمانی برایِ توصیفِ حرکتِ جسم کافی نیست. برایِ کامل‌تر شدنِ اطلاعاتِ ما در موردِ حرکت لازم است کمیتِ دیگری به نامِ سرعتِ لحظه‌ای را تعریف کنیم. سرعتِ لحظه‌ای همان سرعتِ متوسط است ولی برایِ بازه‌یِ زمانیِ بسیاربسیار کوچک. برایِ نوشتنِ این‌که یک کمیت را برایِ Δt یِ کوچک می‌خواهیم از نمادِ حدّ یا $\lim$[2] استفاده می‌کنیم. این عبارت که " سرعتِ لحظه‌ای همان نسبتِ جابه‌جایی، Δx، به زمانِ جابه‌جایی، Δt، است وقتی که Δt به صفر می‌گراید" را به صورت زیر

[2] مخففِ کلمه‌یِ limit و به معنیِ حد است.



شکل ۲—۶: سرعتِ لحظه‌ای‌ِ متحرکِ A در لحظه‌ی‌ِ t همان سرعتِ متحرکِ B در این لحظه است. سرعتِ لحظه‌ای‌ِ چند متحرکِ B_i در زمان‌های‌ِ مختلف در شکل نشان داده شده.

می‌نویسیم

$$v := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (2)$$

اگر این‌کار را برای‌ِ زمان‌های‌ِ مختلف انجام دهیم اطلاعاتی در موردِ سرعت در آن لحظه‌ها خواهیم داشت. در واقع برای‌ِ آن‌که سرعتِ لحظه‌ای‌ِ متحرکِ A را در لحظه‌ی‌ِ مثلاً t به دست آوریم کافی است خطی را بر منحنی‌ِ مکان—زمانِ متحرک در آن لحظه مماس کنیم. خطِ مماس معرف منحنی‌ِ مکان-زمانِ متحرکی مثلِ B است که با سرعتِ ثابت حرکت می‌کند. سرعتِ لحظه‌ای‌ِ متحرکِ A در لحظه‌ی‌ِ t همان سرعتِ متحرکِ B در این لحظه است. چنان‌که در شکلِ (۲—۶) می‌بینید متحرکِ A که حرکتش با منحنی‌ِ خمیده نمایش داده شده سرعتش متغیر است و با گذشتِ زمان عوض می‌شود. در زمان‌هایی سرعتِ متحرکِ A مثبت، در زمانی صفر و در زمان‌هایی منفی است. اما متحرک‌های‌ِ B_0، B_1، B_2، و B_3 با سرعتِ ثابت حرکت می‌کنند. کدام‌یک از B ها سرعتِ‌شان مثبت، کدام‌ها منفی و کدام‌یک ساکن است؟ سرعتِ متحرکِ A در زمان‌های‌ِ t_0، t_1، t_2، و t_3 با سرعتِ متحرک‌های‌ِ B_0، B_1، B_2، و B_3 در آن زمان‌ها برابر است.

بیایید حرکتِ متحرکی را در نظر بگیریم که مکانِ آن در لحظه‌یِ t، $x(t)$، با معادله‌یِ $x(t) = x_0 + ut$ داده می‌شود. ببینید چه اطلاعاتی در موردِ حرکتِ جسم می‌توانیم به دست آوریم. برایِ آن‌که مکانِ اولیه‌یِ متحرک در ابتدا را به دست آوریم کافی است t را مساویِ صفر قرار دهیم. یعنی $x(0) = x_0$. جابه‌جاییِ ذره در فاصله‌یِ زمانیِ t و $t + \Delta t$ عبارت است از

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = x_0 + u(t+\Delta t) - (x_0 + ut) = u\Delta t, \qquad (3)$$

بنا بر این سرعتِ متوسطِ آن در فاصله‌یِ زمانیِ t و $t + \Delta t$ به صورتِ زیر است

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = u. \qquad (4)$$

چنان‌که می‌بینیم برایِ چنین متحرکی سرعتِ متوسطِ آن به زمانِ ابتدا و انتهایِ بازه‌یِ زمانیِ Δt بستگی ندارد. این متحرک در همه‌یِ زمان‌ها سرعتِ لحظه‌ای‌اش ثابت است. می‌گوییم چنین متحرکی با سرعتِ ثابت حرکت می‌کند.

حالا بیایید حرکتِ متحرکی را در نظر بگیریم که مکانِ آن در لحظه‌یِ t، $x(t)$، با معادله‌یِ $x(t) = x_0 + \beta t + \alpha t^2$ داده می‌شود. مکانِ ذره در ابتدا $x(0) = x_0$ است. جابه‌جاییِ ذره در فاصله‌یِ زمانیِ t و $t + \Delta t$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t+\Delta t) - x(t) \\ &= x_0 + \beta(t+\Delta t) + \alpha(t+\Delta t)^2 - (x_0 + \beta t + \alpha t^2) \\ &= \beta\Delta t + 2\alpha t\Delta t + \alpha\Delta t^2, \qquad (5) \end{aligned}$$

و سرعتِ متوسطِ آن در فاصله‌ي زمانی‌يِ t و $t+\Delta t$ به صورتِ زیر است

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \beta + 2\alpha t + \alpha\Delta t. \tag{6}$$

چنان‌که می‌بینیم برایِ چنین متحرکی سرعتِ متوسطِ آن هم به زمانِ ابتدا t و هم به فاصله‌يِ زمانی‌يِ Δt بستگی دارد. سرعتِ لحظه‌ای‌يِ این متحرک عبارت است از

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\beta + 2\alpha t + \alpha\Delta t) = \beta + 2\alpha t. \tag{7}$$

در این حالت سرعتِ اولیه‌يِ متحرک $v(0) = \beta$ است و سرعتِ لحظه‌ای به‌طورِ خطی با زمان تغییر می‌کند.

برایِ حالتِ کلی‌يِ $x = x(t)$، سرعتِ متوسط و سرعتِ لحظه‌ای عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \\ v &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \end{aligned} \tag{8}$$

برایِ خلاصه‌نویسی از نمادِ ساده‌يِ زیر استفاده می‌شود که همان نمادِ مشتق‌گیری در ریاضیات است

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{9}$$

که f یک تابعِ دل‌خواه است. بنا بر این سرعتِ لحظه‌ای مشتقِ مکان نسبت به زمان است و آن را به شکلِ $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ نمایش می‌دهیم.

مشابهِ همین کارها را برایِ سرعت هم می‌توانیم انجام دهیم. تغییراتِ سرعت نسبت به زمان را با دو کمیتِ شتابِ متوسط، $\bar{a}$، و شتابِ لحظه‌ای، a، می‌سنجیم.

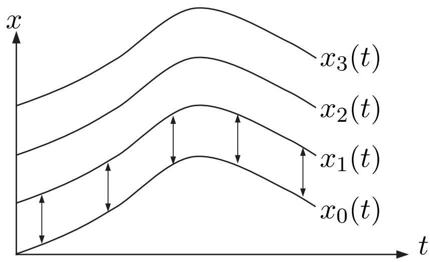
$$\bar{a} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{10}$$

گاهی از نمادِ مشتقِ دوم هم استفاده می‌شود

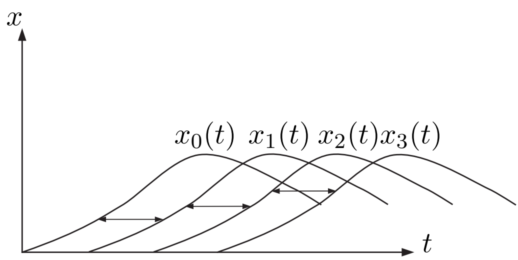
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{11}$$

به طورِ خلاصه شیبِ منحنی‌یِ مکان—زمان در هر لحظه، سرعت در آن لحظه و شیبِ منحنی‌یِ سرعت—زمان در هر لحظه، شتاب در آن لحظه است. وقتی که شیبِ منحنی‌یِ مکان—زمان، یا سرعت منفی است ذره به عقب می‌رود. با عوض کردنِ جهتِ محورِ مختصات، علامتِ سرعت عوض می‌شود. علامتِ شتاب هم فقط به انتخاب جهتِ محورِ مختصات بستگی دارد. اگر برایِ ذره‌ای در لحظه‌یِ t، داشته باشیم $v(t) > 0$ و $a(t) > 0$ (یا $v(t) < 0$ و $a(t) < 0$) در آن لحظه تغییراتِ سرعت در جهتِ سرعت است، پس اندازه‌یِ سرعت زیاد می‌شود. در این حالت می‌گوییم حرکت تندشونده است. و اگر برایِ ذره‌ای در لحظه‌یِ t، داشته باشیم $v(t) < 0$ و $a(t) > 0$ (یا $v(t) > 0$ و $a(t) < 0$) در آن لحظه اندازه‌یِ سرعت کم می‌شود، پس می‌گوییم حرکت کندشونده است. بنا بر این اگر در لحظه‌ای $v(t)a(t) > 0$ باشد در آن لحظه حرکت تندشونده و اگر $v(t)a(t) < 0$ باشد حرکت کندشونده است.

منحنی‌یِ مکان—زمانِ متحرک‌هایِ $x_0(t)$، $x_1(t)$، $x_2(t)$، و $x_3(t)$ در شکلِ (۲—۷) نشان داده شده. شیبِ منحنی‌یِ مکان—زمانِ یک متحرک در هر لحظه سرعتِ لحظه‌ای‌یِ متحرک در آن لحظه است. اگر این شیب با گذشتِ زمان عوض شود حرکت شتاب‌دار است. در این حالت منحنی‌یِ مکان—زمان تقعر و یا تحدب دارد. در همه‌یِ زمان‌ها شیب و تقعرِ این منحنی‌ها یکی است. بنا بر این سرعتِ لحظه‌ای و شتابِ لحظه‌ای‌یِ این متحرک‌ها در همه‌یِ زمان‌ها یکی است. تنها فرقِ این متحرک‌ها

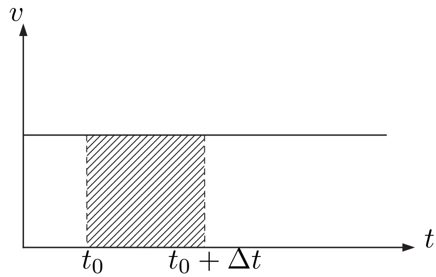


شکل ۲—۷:   چند متحرک با مکانِ اولیه‌هایِ متفاوت هم‌زمان و با سرعت و شتاب‌هایِ یک‌سان در حرکت‌اند. فاصله‌یِ این ذرات ثابت است.



شکل ۲—۸:   چند متحرک که همه‌گی با سرعتِ یک‌سان از مبدأ شروع به حرکت کرده‌اند و ادامه‌یِ حرکتِ‌شان، به جز یک انتقال در زمان، مشابه است.

مکانِ اولیه‌یِ آن‌ها است. این چهار متحرک در زمانِ $t = 0$ از نقاطِ متفاوتی هم زمان و با سرعت و شتاب‌هایِ یک‌سان شروع به حرکت می‌کنند. در تمامِ لحظه‌هایِ بعدی هم سرعت و شتابِ آن‌ها یکی است. همان‌طور که در شکل هم دیده می‌شود فاصله‌یِ نسبی‌یِ این متحرک‌ها با گذشتِ زمان عوض نمی‌شود. در شکلِ (۲—۸)، $x_0(t)$، $x_1(t)$، $x_2(t)$، و $x_3(t)$ معرفِ حرکتِ متحرک‌هایی است که همه‌گی با سرعتِ یک‌سان از مبدأ شروع به حرکت کرده‌اند و ادامه‌یِ حرکتِ‌شان، به جز یک انتقال در زمان، مشابه است. تفاوتِ آن‌ها در زمانِ شروع به حرکت است. فاصله‌یِ بینِ متحرک‌ها با زمان عوض می‌شود.

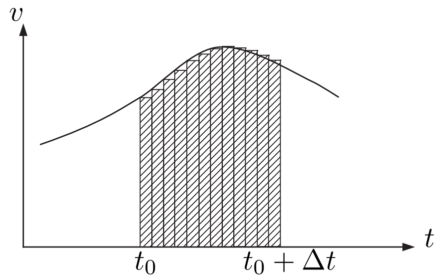


شکل ۲—۹: جابه‌جاییِ ذره‌ای با سرعتِ ثابتِ v در مدتِ Δt سطحِ زیرِ منحنیِ سرعت—زمان در همین مدت است.

با داشتنِ منحنیِ سرعت—زمان می‌توانیم شتابِ متوسطِ متحرک را برایِ یک ناحیه‌یِ زمانی به دست آوریم. شیبِ این منحنی در هر لحظه شتاب در آن زمان است. دیدیم که با داشتنِ منحنیِ مکان—زمان در هر لحظه سرعتِ لحظه‌ای در آن زمان به دست می‌آید. اما آیا برعکس نیز می‌توان عمل کرد. یعنی با داشتنِ منحنیِ سرعت—زمان آیا می‌توانیم اطلاعاتی در مورد مکانِ ذره به دست آوریم. با چیزهایی که پیش‌تر گفتیم حداکثر می‌توانیم در موردِ جابه‌جاییِ ذره حرف بزنیم. زیرا می‌توانیم متحرک‌هایی داشته باشیم که همگی یک منحنیِ سرعت—زمان دارند ولی از مکانِ اولیه‌هایِ متفاوتی حرکت کرده‌اند (شکلِ (۲—۷) را دوباره ببینید).

به عنوان حالتی ساده بیایید ابتدا حرکتِ ذره‌ای با سرعتِ ثابت را بررسی کنیم. برایِ چنین متحرکی $\Delta x = v\Delta t$. جابه‌جاییِ ذره در مدتِ Δt همان سطحِ زیرِ منحنیِ سرعت—زمان در همین مدت است. شکلِ (۲—۹) را ببینید.

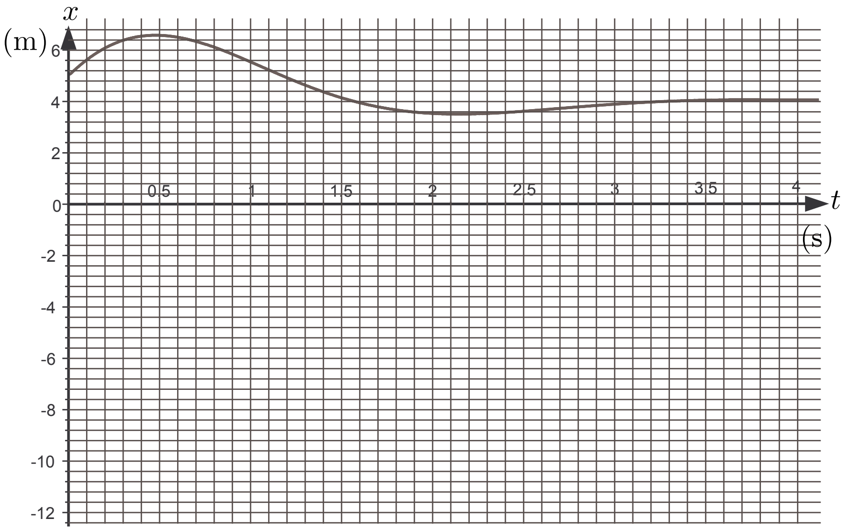
در صورتی که متحرک سرعتش ثابت نباشد، برایِ آن‌که جابه‌جاییِ ذره را بینِ دو زمانِ t و $t + \Delta t$ به دست آوریم، باید این فاصله‌یِ زمانی را به واحدهایِ زمانیِ بسیارکوچکِ δt تقسیم کنیم. در این صورت حرکت به $N = \Delta t/\delta t$ بازه تقسیم شده است. هر چه δt کوچک‌تر باشد، N تعدادِ بازه‌ها بزرگ‌تر است. برایِ بازه‌یِ زمانیِ بسیار کوچکِ δt، جابه‌جایی بسیارکوچک است، $\delta x \approx v\delta t$، که v سرعتِ



شکل ۲—۱۰: جابه‌جاییِ ذره‌ای با سرعتِ متغیرِ v در مدتِ Δt سطحِ زیرِ منحنیِ سرعت—زمان در همین مدت است. کافی است زمانِ Δt را به تعدادِ زیادیِ ناحیه‌یِ زمانیِ خیلی کوچک تقسیم کنیم.

لحظه‌ای است. علامتِ تقریب را به این دلیل به‌کار برده‌ایم که ما به‌تقریب از مساحتِ مثلثِ کوچکی چشم‌پوشی کرده‌ایم. برایِ به دست آوردنِ جابه‌جاییِ کل، Δx، باید جابه‌جایی‌هایِ مربوط به زمان‌هایِ کوچک را با هم جمع کنیم. در این صورت ممکن است چشم‌پوشی از مساحتِ تعدادِ زیادی از این مثلث‌ها وضع را خراب کند و تقریبِ ما تقریبِ مناسبی نباشد. هرچه δt را کوچک‌تر کنیم تعدادِ مثلث‌ها $N = \Delta t/\delta t$ بیش‌تر می‌شود اما مساحتِ هر مثلث تقریباً $\delta v\ \delta t/2$ است، که متناسب با $(\delta t)^2$ است. مقداری که دور ریخته‌ایم متناسب با تعدادِ مثلث‌ها ضرب‌در مساحتِ هرمثلث است و در نهایت نتیجه متناسب با δt است. بنا براین در حدِ N هایِ بزرگ یا δt هایی که به سمتِ صفر میل می‌کنند تقریبِ بالا به‌تر و به‌تر می‌شود. خلاصه‌این‌که سطحِ زیرِ منحنیِ سرعت—زمان در مدتِ Δt جابه‌جاییِ ذره در همین مدت است. شکلِ (۲—۱۰) را ببینید.

حالا بیایید در یک مثالِ خاص با استفاده از منحنیِ مکان—زمانِ یک ذره اطلاعاتی در موردِ سرعتِ آن به دست آوریم. همان‌طور که از شکلِ (۲—۱۱) پیداست در ابتدا شیبِ منحنی مثبت است، یعنی سرعتِ ذره مثبت است و رو به جلو حرکت می‌کند. با گذشتِ زمان شیبِ منحنی کم و بالاخره در زمانِ $t \approx 0.5\mathrm{s}$ شیبِ



شکل ۲—۱۱: منحنیِ مکان—زمان مربوط به تمرینِ 1.

منحنی صفر می‌شود. در لحظه‌ای که شیبِ منحنیِ مکان—زمان صفر می‌شود، سرعتِ ذره صفر است. پس از این زمان شیبِ منحنیِ مکان—زمان منفی، یعنی سرعتِ ذره منفی است و ذره به سمتِ عقب برمی‌گردد. پس از مدتی مجدداً سرعتِ ذره مثبت و بالاخره در زمان‌هایِ نزدیکِ $t \approx 3.8\text{s}$ سرعتِ ذره خیلی کوچک و ذره تقریباً ساکن می‌شود.

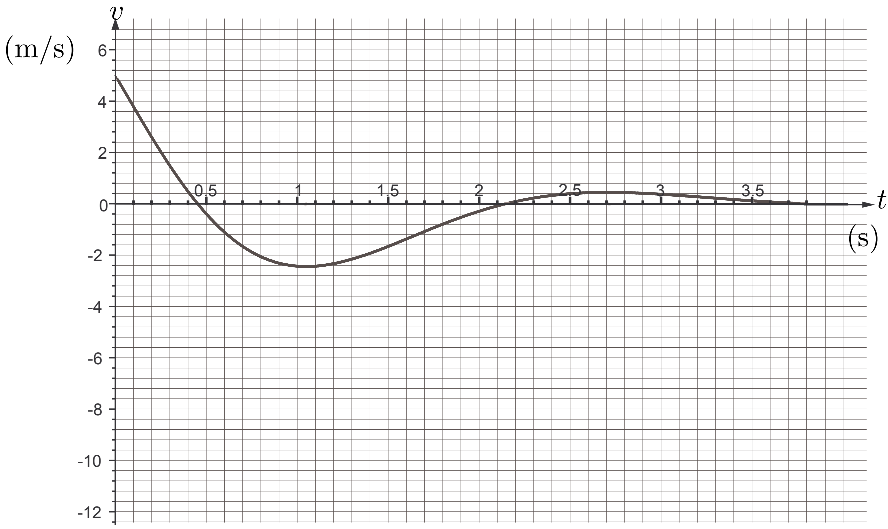
تمرینِ1) با استفاده از منحنیِ شکلِ (۲—۱۱) کمیت‌هایِ زیر را حساب کنید.

الف) سرعتِ متوسطِ ذره بینِ $t = 0$ و $t = 4\ \text{s}$ چه‌قدر است؟

ب) در چه ناحیه‌ای از زمان‌ها سرعتِ ذره مثبت، در چه ناحیه‌هایی منفی و در چه زمان‌هایی صفر است؟

ج) سرعتِ ذره در $t = 0$، $t = 1.5\ \text{s}$ و $t = 4\ \text{s}$ چه‌قدر است؟ حالا بررسی کنید که آیا نتایجِ‌تان با منحنیِ سرعت—زمان که در شکلِ (۲—۱۲) آمده می‌خواند.

تمرینِ2) با استفاده از منحنیِ شکلِ (۲—۱۲) کمیت‌هایِ زیر را حساب کنید.



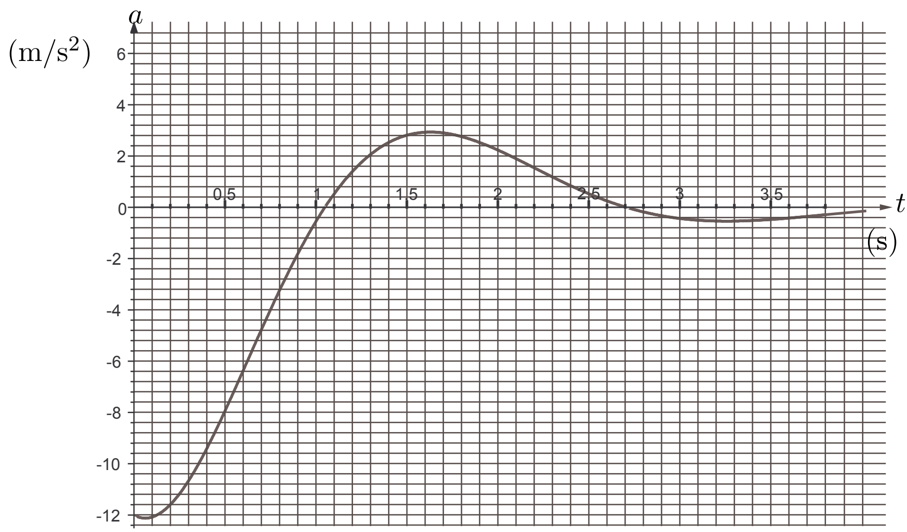
شکل ۲—۱۲: منحنیِ سرعت—زمان مربوط به تمرینِ 2.

الف) شتابِ متوسطِ ذره بینِ $t = 0$ و $t = 4$ s چه‌قدر است؟

ب) شتابِ ذره در $t = 0$، $t = 1.5$ s و $t = 4$ s چه‌قدر است؟

ج) در چه زمان‌هایی شتابِ ذره صفر است؟

بیایید با استفاده از اطلاعاتِ منحنیِ سرعت—زمان‌در شکلِ (۲—۱۲) اطلاعاتی در موردِ جابه‌جاییِ ذره به دست آوریم. برایِ این‌کار باید سطحِ زیرِ منحنیِ سرعت—زمانِ شکلِ (۲—۱۲) را به دست آوریم. برایِ این‌کار باید ابتدا مساحتِ هر یک از خانه‌ها را به دست آوریم. ابعادِ هر خانه $\delta t = 0.1$ s، و $\delta v = 0.4$ m/s است. پس مساحتِ هر خانه $0.4 \text{ m/s} \times 0.1 \text{ s} = 0.04$ m است. برایِ آن‌که جابه‌جاییِ ذره بینِ $t = 0$ و $t = 1.5$ s را به دست آوریم، باید تعدادِ خانه‌ها را بشماریم. همان‌طور که می‌بینیم تعدادِ زیادی از خانه‌ها نصفه نیمه هستند، که کارِ شمردن را دشوار می‌کنند. بنا بر این هر چه اندازه‌یِ خانه‌ها کوچک‌تر باشد نتیجه دقیق‌تر است، هرچند شمردنِ خانه‌ها سخت‌تر می‌شود. توجه داشته باشید که زمان‌هایی که سرعت منفی است، یعنی



شکل ۲—۱۳: منحنی‌ِ شتاب—زمان مربوط به تمرینِ 2.

منحنی‌یِ سرعت—زمان زیر خطِ $v = 0$ است، ذره به عقب بر می‌گردد و جابه‌جایی‌یِ آن منفی است. پس در محاسبه‌یِ جابه‌جایی سطحِ بخش‌هایی که زیر خطِ $v = 0$ هستند را منفی و بخش‌هایِ بالایِ آن را مثبت می‌گیریم.

د) جابه‌جایی‌یِ ذره در فاصله‌یِ زمانی‌یِ $t = 0$، و $t = 1.5$ s چه‌قدر است؟

صحتِ نتایجِ‌تان را با مقایسه با منحنی‌هایِ مکان—زمان شکلِ (۲—۱۱) و شتاب—زمان شکلِ (۲—۱۳) بررسی کنید. با استفاده از منحنی‌یِ سرعت— زمان سرعتِ متوسط $\bar{v}(t_0, t_0 + \Delta t)$ را نیز می‌توانیم به دست آوریم. کاری که باید بکنیم این است که ببینیم متحرک در فاصله‌یِ زمانی‌یِ Δt چه‌قدر جابه‌جا شده. سرعتِ متوسط برابر با سرعتِ متحرکی است که در فاصله‌یِ زمانی‌یِ Δt جابه‌جایی‌یِ مشابهی داشته.

ه) سرعتِ متوسط در فاصله‌یِ زمانی‌یِ $t = 0$ و $t = 1.5$ s چه‌قدر است؟

۲–۱–۱ حرکت با شتابِ ثابت

ذره‌ای را در نظر بگیرید که با شتابِ ثابتِ a در یک‌بُعد حرکت می‌کند. چون شتاب ثابت است

$$\Delta v = a\Delta t, \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + at. \tag{12}$$

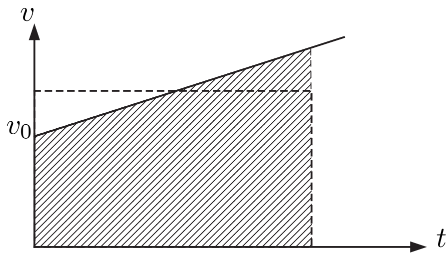
که $v_0 = v(0)$ سرعتِ اولیه‌یِ ذره است. معادله‌یِ سرعت بر حسبِ زمان یک خطِ راست است. شکلِ (۲–۱۴) را ببینید. سطحِ زیرِ منحنی‌یِ سرعت–زمان در فاصله‌یِ زمانی‌یِ $t = 0$ و t که همان جابه‌جایی است برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{v + v_0}{2} t \\ &= \frac{v_0 + at + v_0}{2} t, \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \end{aligned} \tag{13}$$

در این محاسبه سرعت را جاگذاری کرده‌ایم. در روابط (13) و (12) سرعت و مکان بر حسبِ زمان به دست آمده‌اند. با حذفِ زمان بینِ این دو می‌توانیم رابطه‌ای بینِ مکان و سرعت به دست آوریم.

$$2a\Delta x = v^2 - v_0^2. \tag{14}$$

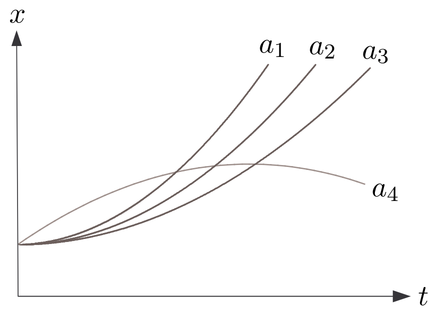
منحنی‌یِ مکان–زمان برایِ متحرک‌هایی با شتاب‌هایِ ثابت، a_1، a_2، a_3 و a_4 در شکلِ (۲–۱۵) رسم شده‌اند. هر چه شیبِ منحنی‌یِ مکان–زمان بزرگ‌تر باشد سرعتِ ذره در آن لحظه بزرگ‌تر است. هر چه انحنایِ منحنی‌یِ مکان–زمان بزرگ‌تر یا به عبارتی تقعر یا تحدبِ منحنی بیش‌تر باشد، در زمانِ معین اندازه‌یِ تغییرِ سرعت



شکل ۲—۱۴:   منحنیِ سرعت—زمان برایِ متحرکی با شتابِ ثابت.

بزرگ تر و در نتیجه اندازه‌یِ شتاب بزرگ‌تر است. اگر تقعرِ منحنی‌یِ سرعت—زمان رو به بالا باشد شتاب مثبت و اگر رو به پایین باشد شتاب منفی است. پس $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ و $a_4 < 0$ است. شکلِ عمومی‌یِ معادله‌یِ مکان—زمانِ حرکت با شتابِ ثابت به صورتِ $x(t) = x_0 + v_0 t + at^2/2$ است. این معادله معادله‌یِ یک سهمی است که محورِ تقارنش خطی موازی‌یِ محورِ x است. همه‌یِ این‌ها را می‌توانید در شکلِ (۲—۱۵) ببینید. توجه داشته باشید که مسیرِ ذره یک‌بُعدی و خطِ راست است و آن‌چه سهمی است منحنی‌یِ مکان—زمان است. معروف‌ترین مثالِ حرکت با شتابِ ثابت، سقوطِ آزاد است. سقوطِ آزادِ یک جسم، حرکتِ آن جسم تحتِ اثرِ نیرویِ گرانشِ زمین و در غیابِ نیروهایِ دیگر مثلِ مقاومتِ هوا است. چنان‌که خواهیم دید در سقوطِ آزاد اندازه‌یِ شتاب ثابت، جهتِ آن قائم و رو به پایین است. اندازه‌یِ شتابِ سقوطِ آزاد که معمولاً آن را با g نمایش می‌دهند برایِ نقاطِ مختلفِ سطحِ زمین فرق می‌کند، ولی تقریباً $9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ است. اگر جهتِ مثبتِ x را رو به بالا بگیریم $a = -g$. پس

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$
$$v = v_0 - gt$$



شکل ۲—۱۵: چند متحرک که همه‌گی با مکانِ اولیه‌یِ یک‌سان، و شتابِ ثابت در حرکت‌اند. برایِ متحرک‌هایِ 1، 2، و 3، سرعتِ اولیه صفر و $a_1, a_2, a_3 > 0$، تقعر منحنی‌یِ مکان—زمان رو به بالا است. برایِ متحرکِ 4، سرعتِ اولیه مثبت، و $a_4 < 0$ و بالاخره تقعر منحنی‌یِ مکان—زمان رو به پایین است.

$$-2g(x - x_0) = v^2 - v_0^2. \tag{15}$$

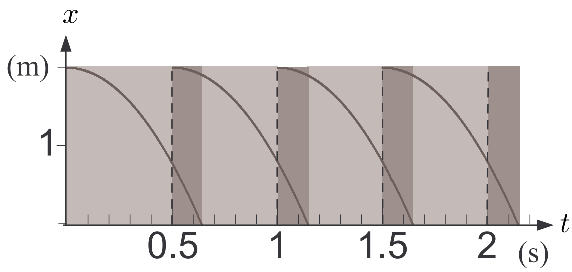
مثالِ1) دوشی را در نظر بگیرید که در ارتفاعِ $x_0 = 2\ \mathrm{m}$ است. در هر نیم‌ثانیه یک قطره از آن می‌چکد.

الف) چه‌مدت طول می‌کشد تا هر قطره به زمین برسد؟

مبدأ را زمین و جهتِ مثبت را رو به بالا می‌گیریم، $x_0 = 2\ \mathrm{m}$. لحظه‌ای که قطره به زمین می‌رسد را T می‌گیریم. پس $x(T) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 - \frac{1}{2}gT^2, \\ T &= \sqrt{\frac{4}{g}} \approx 0.64\ \mathrm{s}. \end{aligned} \tag{16}$$

ب) وقتی قطره‌یِ اول به زمین می‌رسد قطره‌یِ دوم در چه ارتفاعی است؟



شکل ۲—۱۶: منحنیِ مکان—زمان مربوط به چند قطره که به طورِ منظم از دوشی می‌چکند.

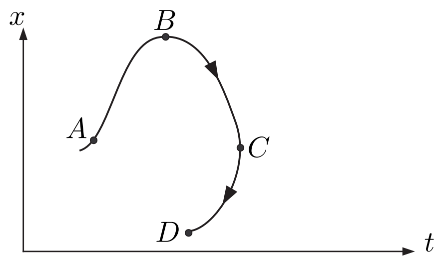
وقتی قطره‌یِ اول به زمین می‌رسد، قطره‌یِ دوم مدتی است که رها شده. این زمان $T_1 = \sqrt{4/g} - 0.5 \approx 0.14\ \mathrm{s}$ است. ارتفاعِ قطره‌یِ دوم پس از گذشتِ زمانِ T_1 از رها شدن از رابطه‌یِ زیر به دست می‌آید

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{2} g T_1^2 \approx 1.9\ \mathrm{m}. \qquad (17)$$

ج) در هر لحظه چند قطره در هوا است؟

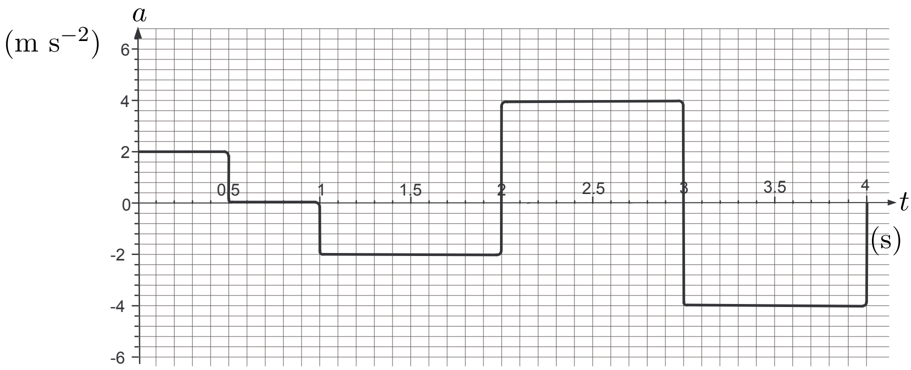
وقتی قطره‌یِ اول رها می‌شود تا قبل از $0.5\ \mathrm{s}$، یعنی به ازایِ $t < 0.5\ \mathrm{s}$ فقط یک قطره در هوا است. پس از آن در فاصله‌یِ $0.5\ \mathrm{s} < t < 0.64\ \mathrm{s}$ قطره‌یِ اول هنوز به زمین نرسیده و قطره‌یِ دوم هم رها شده. پس در این فاصله‌یِ زمانی دو قطره در هوا است. به همین صورت در فاصله‌یِ $0.64\ \mathrm{s} < t < 1\ \mathrm{s}$ فقط یک قطره در هوا است. این نواحی به صورت نواحیِ با رنگ‌هایِ خاکستریِ متفاوت در شکلِ (۲—۱۶) نشان داده شده‌اند.

مختصه‌یِ مکان بسته به این‌که مبدأ را کجا بگیریم، می‌تواند مثبت، یا منفی باشد. مختصه‌یِ زمان نیز از این نظر شبیهِ مختصه‌یِ مکان است و با انتخابِ مبدأِ زمان، می‌تواند مثبت، یا منفی باشد. اما یک تفاوتِ اصلیِ مختصه‌هایِ مکان و زمان در این است که مختصه‌یِ زمان هم‌واره افزایش پیدا می‌کند، یعنی اگر t_2 بعد از t_1 باشد،



شکل ۲—۱۷: مثالی از یک منحنی‌ِ مکان—زمانِ غیرِفیزیکی. در مکان—زمانِ C سرعت بی‌نهایت و خمِ CD معرفِ برگشتِ به عقب در زمان است.

$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ است، در حالی‌که Δx می‌تواند مثبت یا منفی باشد. معنی‌ِ این حرف این است که ما در مکان می‌توانیم به عقب برگردیم، ولی برگشتِ به عقب در زمان نداریم. بنا بر این منحنی‌ِ مکان—زمانِ هیچ متحرکی نمی‌تواند به صورتِ شکلِ (۲—۱۷) باشد. خمِ AB ایرادی ندارد. ولی در خمِ BC شیبِ منحنی در نقطه‌ِ C و در نتیجه سرعت در مکان—زمانِ C بی‌نهایت است، که غیرِفیزیکی است. خمِ CD هم که معرفِ برگشتِ به عقب در زمان است، که معنی ندارد. یکی دیگر از خواصِ منحنی‌ِ مکان—زمان پیوستگی‌ِ آن است. منظور از پیوستگی این است که در این منحنی پرش وجود ندارد. هر چه δt را کوچک کنیم δx کوچک می‌شود. برایِ هر جابه‌جایی‌ِ δx هر قدر هم کوچک بازه‌ِ زمانی‌ِ δt ای لازم است. معنی‌ِ این حرف این است که ما نمی‌توانیم هم‌زمان در دو مکانِ متفاوت باشیم. منحنی‌ِ سرعت—زمان نیز پیوسته است. یعنی سرعت نمی‌تواند آناً تغییرِ اندازه دهد. نسبتِ تغییرِ سرعت δv به زمانِ δt شتابِ متحرک است. به ازایِ δvِ معین، هر چه δt کوچک‌تر باشد، شتاب بزرگ‌تر است. به ازایِ $\delta v \neq 0$، اگر $\delta t = 0$ باشد شتاب بی‌نهایت است. در فصلِ دینامیک خواهیم دید که برایِ شتابِ بی‌نهایت نیروی‌ِ بی‌نهایت لازم است که ممکن نیست. هرچه تغییرِ سرعت در واحدِ زمان بزرگ‌تر باشد شتاب بزرگ‌تر است و نیروی بزرگ‌تری لازم است. اما مشتقِ شتاب می‌تواند بزرگ باشد. در واقع منحنی‌ِ



شکل ۲—۱۸: منحنیِ شتاب—زمانِ یک ذره. در این مثال منحنیِ شتاب—زمان تقریباً ناپیوسته است.

شتاب—زمان می‌تواند به طور تقریبی ناپیوسته باشد. وقتی که جسمی را با دست نگه داشته‌ایم شتابش صفر است. وقتی که آن را رها می کنیم، اندازه‌یِ شتابِ آن در زمان کوتاهی g می‌شود. شتابِ این جسم بر حسبِ زمان تقریباً ناپیوسته است. به بیانِ دقیق‌تر نیرو تابعی پیوسته از زمان، مکان و سرعت است، که آن‌ها هم تابع‌هایی پیوسته از زمان‌اند، پس شتاب هم واقعاً ناپیوسته نیست ولی می‌تواند تغییراتش تند باشد.

بیایید مثالِ زیر را نظر بگیریم.

مثالِ2) در این مثال شتابِ ذره در چند بازه‌یِ زمانی ثابت است. همان‌طور که در شکلِ (۲—۱۸) می‌بینیم منحنی‌یِ شتاب—زمان تقریباً ناپیوسته است. فرض کنید ذره در ابتدا در مبدأ است و سرعتِ اولیه‌یِ آن صفر است.

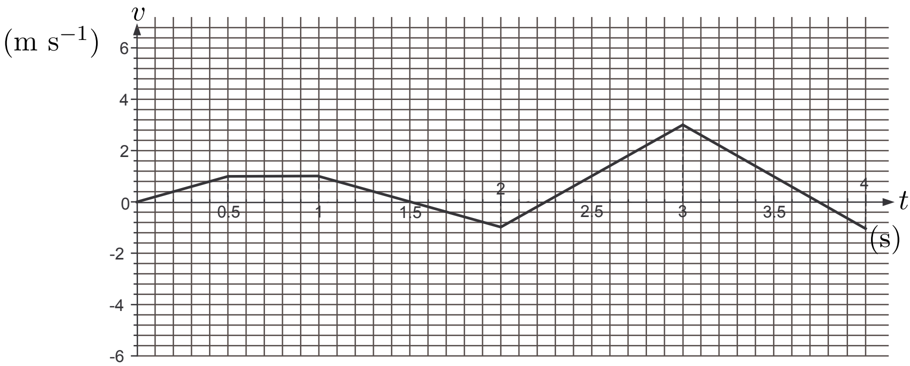
$$x_0 = x(0) = 0, \qquad v_0 = v(0) = 0. \tag{18}$$

در بازه‌یِ زمانی‌یِ $0 < t < 0.5\ \mathrm{s}$ ذره با شتابِ ثابتِ $a = 2\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ حرکت می‌کند. در این مدت سرعتِ آن به طورِ خطی زیاد می‌شود. منحنی‌یِ مکان—زمانِ آن نیز

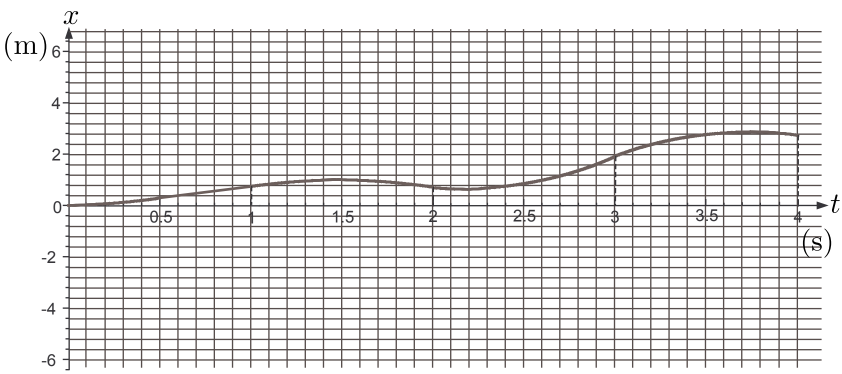
بخشی از یک سهمی است. چون $v_0 = 0$ است. شیبِ سهمی در $t = 0$ صفر است. پس کمینه‌یِ سهمی در $t = 0$ است. چون شتاب مثبت است، تقعرِ سهمی رو به بالا است. در این مدت جابه‌جاییِ ذره را با استفاده از سطحِ زیرِ منحنی‌یِ سرعت—زمان می‌توانیم به دست آوریم. مقدارِ آن 0.25 m است. در بازه‌یِ زمانی‌یِ $0.5\ \mathrm{s} < t < 1\ \mathrm{s}$ شتابِ صفر است. پس سرعتِ ذره در این مدت ثابت می‌ماند. در $t = 0.5$ s سرعتِ ذره پیوسته است، ولی شیبِ آن یعنی شتاب پیوسته نیست. منحنی‌یِ مکان—زمانِ در این فاصله یک خطِ راست است. این منحنی و مشتقِ آن که سرعت است در $t = 0.5$ s پیوسته است. جابه‌جاییِ ذره در این مدت را می‌توانیم با استفاده از سطحِ زیرِ منحنی‌یِ سرعت—زمان به دست آوریم. مقدارِ آن 0.5 m است. در بازه‌یِ زمانی‌یِ $1\ \mathrm{s} < t < 2\ \mathrm{s}$ ذره با شتابِ ثابتِ $a = -2\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ حرکت می‌کند. در این مدت سرعتِ آن ابتدا به طورِ خطی کاهش پیدا می‌کند تا آن‌که در $t = 1.5$ s صفر شود. پس از آن سرعتِ ذره منفی می‌شود. منحنی‌یِ مکان—زمانِ بخشی از یک سهمی است. چون شتاب منفی است، تقعرِ سهمی رو به پایین است. جابه‌جاییِ ذره در این مدت با استفاده از سطحِ زیرِ منحنی‌یِ سرعت—زمان به دست می‌آید. مقدارِ جابه‌جایی در این مدت صفر است. برایِ زمان‌هایِ $2\ \mathrm{s} < t$ اطلاعاتِ منحنی‌هایِ سرعت—زمان و مکان—زمان را به عنوانِ تمرین خودِتان به دست آورید. این منحنی‌ها در شکل‌هایِ (۲—۱۹) و (۲—۲۰) رسم شده‌اند.

گاهی اوقات بدونِ محاسبه‌یِ کمّی و فقط با استفاده از منحنی‌هایِ مکان—زمان و یا سرعت—زمان می‌توانیم اطلاعاتی در موردِ حرکتِ متحرک به دست آوریم. بیایید چند مثال در این مورد را در نظر بگیریم. البته در این مثال‌ها با محاسبه‌هایِ کمّی نتایجِ خود را وارسی خواهیم کرد.

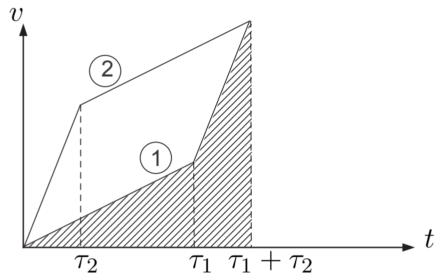
مثالِ3) دونده‌ای می‌خواهد به مدت τ بدود. او مدتِ τ_1 را با شتابِ a_1 و مدتِ τ_2 را با شتابِ a_2 $(a_2 > a_1)$ می‌دود. دونده‌یِ دیگری همین مدت می‌دود. اما او ابتدا مدتِ τ_2 را با شتابِ a_2 و سپس مدتِ τ_1 را با شتابِ a_1 می‌دود. جابه‌جاییِ کدام دونده



شکل ۲—۱۹:   منحنیِ سرعت—زمانِ یک ذره. مربوط به مثالِ 2.



شکل ۲—۲۰:   منحنیِ مکان—زمانِ یک ذره. مربوط به مثالِ 2.



شکل ۲—۲۱: منحنی‌هایِ سرعت—زمانِ دو دونده که بخشی از حرکت را با شتابِ کم و بخشِ دیگر را با شتابِ بزرگ‌تر می‌دوند. دونده‌ای که در بخشِ اولِ حرکت با شتابِ کم‌تر دویده و در بخشِ دوم با شتابِ بیش‌تر دویده دیرتر می‌رسد.

بیش‌تر است؟

بیایید منحنی‌هایِ سرعت—زمانِ این دو دونده را بررسی کنیم. سطحِ زیرِ منحنی‌یِ مکان—زمانِ دونده‌یِ اول هاشور زده شده. جابه‌جاییِ دونده‌یِ دوم به اندازه‌یِ مساحتِ متوازی‌الاضلاعی که در شکلِ (۲—۲۱) می‌بینید، بیش‌تر است. پس دونده‌ای که ابتدا با شتابِ بیش‌تر می‌دود جابه‌جاییِ بزرگ‌تری دارد. این جابه‌جاییِ اضافه را می‌شود به طورِ کمّی هم محاسبه کرد. سرعتِ دونده‌یِ اول پس از گذشتِ زمانِ τ_1، $a_1\tau_1$ است. این سرعت سرعتِ اولیه‌یِ او در مرحله‌یِ دومِ حرکتش است. سرعتِ این دونده در انتهایِ مرحله‌یِ دومِ حرکتش $v = a_1\tau_1 + a_2\tau_2$ است. سرعتِ دونده‌یِ دوم هم پس از گذشتِ زمانِ $\tau = \tau_1 + \tau_2$ همین مقدار می‌شود. جابه‌جاییِ دونده‌یِ اول در مرحله‌یِ اولِ حرکتش $\frac{1}{2}a_1\tau_1^2$ است. او در مرحله‌یِ دومِ حرکتش $\frac{1}{2}a_2\tau_2^2 + a_1\tau_1\tau_2$ جابه‌جا می‌شود. به طورِ خلاصه جابه‌جاییِ دونده‌یِ اول x_1، و جابه‌جاییِ دونده‌یِ دوم x_2 عبارت‌اند از

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1\tau_1^2 + [\frac{1}{2}a_2\tau_2^2 + a_1\tau_1\tau_2],$$
$$x_2 = \frac{1}{2}a_2\tau_2^2 + [\frac{1}{2}a_1\tau_1^2 + a_2\tau_2\tau_1]. \qquad (19)$$

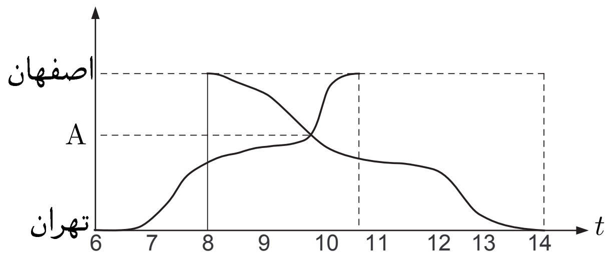
اختلافِ جابه‌جاییِ دو دونده پس از زمانِ τ، عبارت است از

$$x_2 - x_1 = (a_2 - a_1)\tau_1\tau_2. \qquad (20)$$

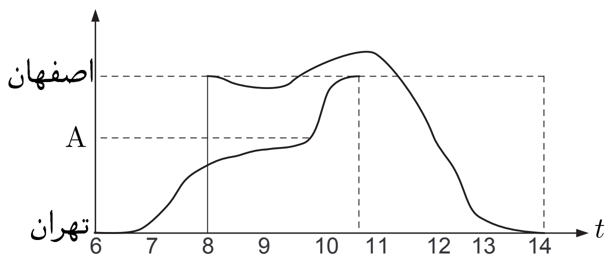
مثالِ4) شخصی ساعت 6 صبح با خودرو از تهران عازم اصفهان می‌شود و ساعت 40 : 10 صبح همان روز به اصفهان می‌رسد. این شخص ساعت 8 صبح روز بعد با خودرو از اصفهان به تهران بر می‌گردد و ساعت 2 بعدازظهر همان روز به تهران می‌رسد. آیا نقطه‌ای مثلِ A در مسیرِ تهران—اصفهان وجود دارد به طوری‌که ساعت او در رفت عدد T_1 و در برگشت از اصفهان، هنگام رسیدن به نقطه‌ی A مجدداً همان عدد T_1 را نشان دهد؟ فرض کنید علامتِ سرعتِ هیچ‌گدام از متحرک‌ها تغییر نمی‌کند.

دو منحنیِ دل‌خواه برایِ‌رفت و برگشت مثلِ شکلِ (۲—۲۲) در نظر می‌گیریم. مسیرِ برگشت ۲۴ ساعت بعد است که چون پس از ۲۴ ساعت، ساعت همان مقدارِ روز قبل را نشان می‌دهد، هر دو منحنی را در یک چارچوب کشیده‌ایم. واضح است که دو منحنی حتماً هم‌دیگر را حداقل در یک نقطه مثلِ A قطع می‌کنند. در این نقطه ساعتِ مسافر در هر دو روز یک عدد را نشان می‌دهد. آیا امکان دارد که چند نقطه وجود داشته باشد که ساعتِ دو مسافر یک عدد را نشان دهند؟ به عنوانِ تمرین، منحنی‌هایِ مکان—زمانِ رفت و برگشتِ دو خودرو را برایِ چنین حالتی رسم کنید. اگر شرطِ آخر یعنی تغییر نکردنِ علامتِ سرعت را کنار بگذاریم ممکن است منحنی‌هایِ مکان—زمانِ دو متحرک کم تر از یک نقطه‌یِ تقاطع یا بیش‌تر از یک نقطه‌یَ تقاطع داشته باشند.

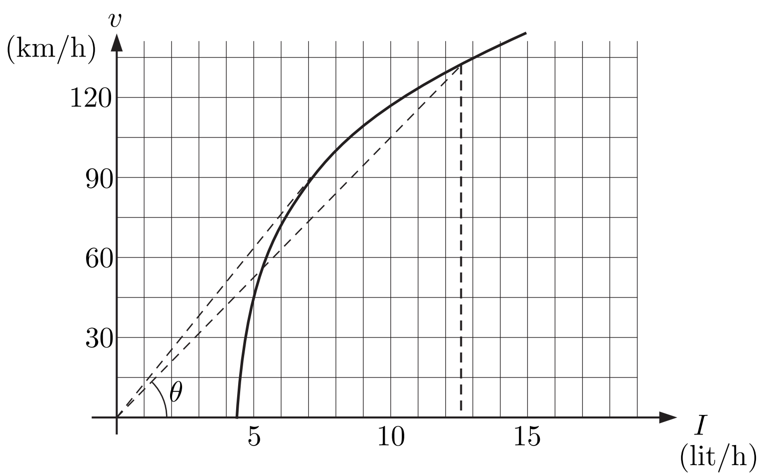
مثالِ5) راننده‌ای می‌خواهد مسیرِ معینی را با کم‌ترین مصرفِ سوخت طی کند. برایِ این‌کار از نمودارِ (۲—۲۴) که منحنیِ سرعت بر حسبِ سوخت بر واحدِ زمان برایِ این خودرو است، استفاده می‌کند. v بر حسبِ کیلومتر بر ساعت و I بر حسبِ لیتر بر ساعت است. همان‌طور که در شکل هم می‌بینیم در سرعت هایِ کم سوختِ مصرفی در واحدِ زمان با تغییرِ سرعت خیلی تغییر نمی‌کند. با زیاد شدنِ سرعت مصرفِ سوخت هم



شکل ۲—۲۲: منحنی‌هایِ مکان—زمانِ رفت و برگشتِ خودرو. مربوط به مثالِ 4.



شکل ۲—۲۳: منحنی‌هایِ مکان—زمانِ رفت و برگشتِ خودرو. در این‌حالت مسافری که از اصفهان به تهران می‌آمده در بخش‌هایی از مسیر سرعتش تغییرِ علامت داده. مربوط به مثالِ 4.



شکل ۲—۲۴: منحنیِ سرعت بر حسبِ سوخت بر واحدِ زمانِ یک خودرو.

زیاد می‌شود. در سرعت‌هایِ بالاتر سوختِ بیش‌تری مصرف می‌شود ولی جابه‌جاییِ خودرو هم بیش‌تر است.

سوختی که در مدتِ بسیارکوتاهِ $\mathrm{d}t$ مصرف می‌شود را $\mathrm{d}F$ بگیرید. در این صورت $\mathrm{d}F = I\mathrm{d}t$ است. چنان‌که در شکلِ (۲—۲۴) می‌بینیم $\tan\theta = v/I$ و

$$\frac{v}{I} = \frac{v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}F} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}F}. \tag{21}$$

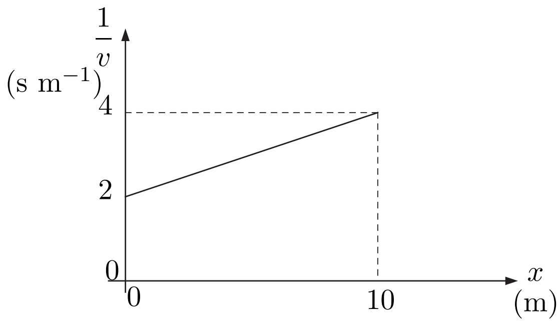
هر چه $\tan\theta$ بزرگ‌تر باشد نسبتِ v/I بزرگ‌تر و در نتیجه $\mathrm{d}x/\mathrm{d}F$ بیش‌تر است. اما نسبتِ $\mathrm{d}x/\mathrm{d}F$ مسافتِ پیموده شده در واحدِ سوختِ مصرفی است. اگر از مبدأ به منحنیِ $v-I$ مماس کنیم نقطه‌یِ تماس نقطه‌ای با بیش‌ترین θ است و سرعتی را می‌دهد که به ازایِ آن با کم‌ترین مصرفِ سوخت می‌شود طولِ معینی را طی کرد، یا با سوختِ معینی بیش‌ترین مسافت را پیمود. برایِ خودرویِ این مثال سرعتِ $90\ \mathrm{km/h}$ سرعتِ بهینه است. این خودرو اگر با این سرعت حرکت کند در یک‌ساعت 7 لیتر سوخت مصرف می‌کند.

۲—۱—۲ منحنیِ سرعت—مکان

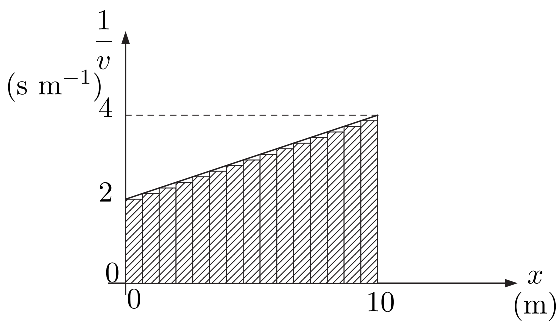
در بخش‌هایِ قبل دیدیم که با استفاده از منحنی‌هایِ مکان—زمان و یا سرعت—زمان می‌توانیم اطلاعاتی در موردِ حرکتِ جسم به دست آوریم. در این بخش می‌خواهیم از منحنیِ سرعت—مکان اطلاعاتی در موردِ حرکتِ جسم استخراج کنیم.

مثالِ6) برای جسمی، نمودار عکس سرعت $(\frac{1}{v})$ بر حسب مکان مطابق شکلِ (۲—۲۵) است. در زمان صفر، جسم در $x = 0$ است. پس از چند ثانیه جسم به $x = 10\,\mathrm{m}$ می‌رسد؟

ببینیم سطحِ زیرِ منحنیِ $\frac{1}{v}$ بر حسبِ x چیست.



شکل ۲—۲۵: منحنیِ معکوسِ سرعت برحسبِ مکان. مربوط به مثالِ 6.

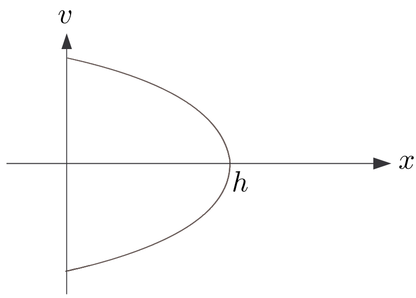


شکل ۲—۲۶: سطحِ زیرِ منحنیِ معکوسِ سرعت برحسبِ مکان. مربوط به مثالِ 6.

$$\frac{1}{v} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta t}{\delta x} \tag{22}$$

برایِ آن‌که سطحِ زیرِ منحنی را به دست آوریم، آن را به تعدادِ زیادی نوار تقسیم می‌کنیم که عرضِ هر کدام δx است. مساحتِ هر کدام از این نوارها $\delta S \approx \frac{1}{v}\delta x = \delta t$ است. سطحِ کلِ ناحیه‌یِ هاشور زده مدت‌زمانِ حرکت، T، است. مساحتِ ذوزنقه $T = 30\text{s}$ است.

برایِ متحرکی که در یک‌بعد حرکت می‌کند می‌توانیم از سرعت و مکانِ آن فضایی دوبعدی بسازیم. به این فضا، فضایِ فاز می‌گوییم. در هر لحظه متحرک یک مکان و یک سرعت دارد که این معادلِ یک نقطه در فضایِ فاز است. به این نقطه نقطه‌یِ فاز



شکل ۲—۲۷: فضایِ فاز برایِ یک حرکتِ یک پرتابه.

می‌گوییم. شکلِ (۲—۲۷) را ببینید. با گذشتِ زمان مکان و سرعتِ ذره عوض می‌شود و نقطه‌یِ فاز در فضایِ فاز حرکت می‌کند و یک خم به وجود می‌آورد. چون مکان و سرعتِ متحرک پرش ندارند، این خم پیوسته است. لزومی ندارد که این خم معرفِ یک تابعِ یک‌به‌یک باشد، یعنی به ازایِ یک مکان ممکن است ذره دو سرعت داشته باشد. در واقع این دو سرعتِ مختلف سرعتِ ذره در دو زمانِ مختلف است. مثلاً وقتی ذره‌ای را در راستایِ قائم پرتاب می‌کنیم در بخشی از حرکت سرعتِ ذره رو به بالا و در بخشِ دیگر رو به پایین است. به ازایِ هر نقطه از مسیر دو سرعت وجود دارد. یکی مربوط به زمانی که ذره بالا می‌رفت، و دومی مربوط به وقتی است که رو به پایین سقوطِ آزاد می‌کند. با استفاده از این خم می‌توانیم اطلاعاتی کیفی از حرکتِ جسم به دست آوریم.

شتابِ ذره را به صورتِ زیر نیز می‌توان نوشت.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{(\frac{dx}{v})} = v\frac{dv}{dx}.$$

جاهایی که $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$ است، جاهایی است که شتابِ ذره صفر است. هر جا v و $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ هم‌علامت هستند شتاب مثبت و هرجا علامتِشان برعکس است شتاب منفی است. هرجا $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} > 0$ است سرعت و شتاب هم‌علامت هستند. در این نواحی حرکت تندشونده است. و هرجا $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} < 0$ است سرعت و شتاب علامتِشان عکسِ هم است. در این نواحی حرکت کندشونده است.

شکلِ (۲—۲۷) مثالی از فضایِ فازِ یک پرتابه‌یِ یک‌بعدی است. در $x = h$، سرعت صفر و $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ بی‌نهایت است، ولی حاصلِ‌ضربِ این دو یعنی شتاب محدود و برابر با g است.

۲—۲ حرکتِ دو بعدی

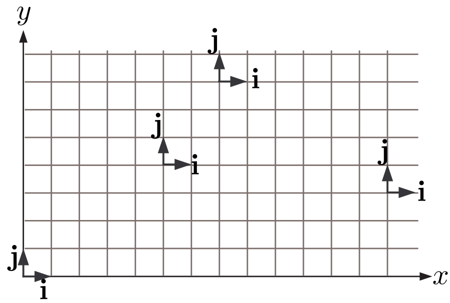
۲—۲—۱ مختصاتِ دکارتی

هر گاه بردارِ $\mathbf{A}$ را در یک عددِ مثبت ضرب کنیم نتیجه یک بردار است. بردارِ حاصل هم‌جهتِ $\mathbf{A}$ است، ولی اندازه‌اش در آن عدد ضرب می‌شود. اگر در عددی منفی ضرب کنیم جهتِ بردار معکوس هم می‌شود. بردارِ $\mathbf{A}$ با اندازه‌یِ A را در نظر بگیرید. بردارِ یکه‌یِ $\mathbf{a}$ به صورتِ زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{a} := \frac{\mathbf{A}}{A}. \tag{23}$$

$\mathbf{a}$ برداری در راستا و هم‌جهت با $\mathbf{A}$ ولی با اندازه‌یِ واحد است. یک فضایِ دوبعدی‌یِ دکارتی با محورهایِ x، و y را در نظر بگیرید. بردارِ یکه‌یِ $\mathbf{i}$ برداری در جهتِ مثبتِ x و بردارِ یکه‌یِ $\mathbf{j}$ برداری در جهتِ مثبتِ y است. هر دو بردار اندازه‌شان واحد است. در هر نقطه از این فضایِ دوبعدی می‌توانیم بردارهایِ یکه‌یِ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ را تعریف کنیم. بردارِ $\mathbf{i}$ در هر نقطه با این سه شرط تعریف می‌شود: برداری است عمود بر خطِ xِ ثابت در آن نقطه، در جهتِ افزایشِ x است، و اندازه‌اش نیز واحد است. بردارِ $\mathbf{j}$ در هر نقطه برداری است عمود بر خطِ yِ ثابت در آن نقطه، در جهتِ افزایشِ y است، و اندازه‌اش نیز واحد است. شکلِ (۲—۲۸) را ببینید.

هر بردار در این فضا را می توانیم بر حسبِ این دو بردارِ یکه تجزیه کنیم



شکل ۲—۲۸: بردارهایِ یکه‌یِ فضایِ دکارتی‌یِ دوبُعدی

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}. \tag{24}$$

به این دلیل به بردارهایِ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بردارهایِ پایه هم می‌گوییم. البته لازم نیست بردارهایِ پایه یعنی بردارهایی که همه‌یِ بردارها را می‌توان بر حسبِ آن‌ها بسط داد طولِ‌شان واحد باشد. در واقع در دوبُعد هر دو برداری که در یک راستا نباشند بردارِ پایه هستند. بردارهایِ $\mathbf{i}$ (و همین طور $\mathbf{j}$) در همه‌یِ نقاط موازی، هم‌جهت و هم‌اندازه‌اند.

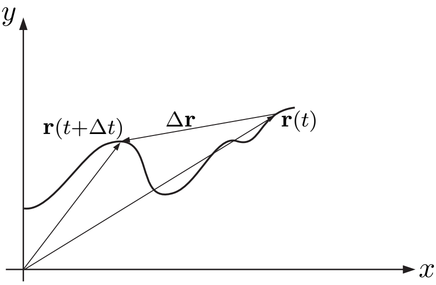
بینِ دو بردار می‌توانیم ضرب تعریف کنیم. یکی از ضرب‌هایی که بینِ دو بردار تعریف می‌شود، ضربِ داخلی یا ضربِ اسکالر است. ضربِ اسکالرِ دو بردارِ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را به صورتِ $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ می‌نویسیم و به صورتِ زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\vartheta. \tag{25}$$

که ϑ زاویه‌یِ بینِ دو بردار، و A، و B به ترتیب اندازه‌یِ بردارهایِ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هستند. است. از این تعریف پیداست که ضربِ داخلی‌یِ دو بردارِ عمود بر هم صفر است.

تمرینِ3) قاعده‌یِ شرکتِ پذیری برایِ این نوع ضرب

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}. \tag{26}$$



شکل ۲—۲۹: بردارِ مکان و جابه‌جاییِ یک ذره در دوبُعد

را اثبات کنید.

با استفاده از قاعده‌یِ شرکت‌پذیری می‌توانید نشان دهید در فضایِ دوبعدی

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y. \qquad (27)$$

هر نقطه از یک فضایِ دوبعدی با دو مختصه‌یِ x و y که مؤلفه‌هایِ بردارِ مکان هستند معین می‌شود.

وقتی جسمی در دو بعد حرکت می‌کند، برایِ تعیینِ مکانِ آن $\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}x(t)+\mathbf{j}y(t)$ هر دو مختصه‌یِ $x(t)$ و $y(t)$ لازم هستند. $\mathbf{i}$، و $\mathbf{j}$ بردارهایِ یکه، x، و y مختصه‌هایِ ذره و t پارامترِ زمان است. با گذشتِ زمان علی‌الاصول مکانِ ذره عوض می‌شود. در شکلِ (۲—۲۹) حرکتِ ذره رویِ مسیری دل‌خواه در دوبُعد را می‌بینیم. شبیهِ حالتِ یک‌بُعدی سرعتِ متوسطِ ذره در زمانِ Δt به صورتِ نسبتِ جابه‌جاییِ ذره در این مدت یعنی $\Delta\mathbf{r}$، به زمانِ آن Δt تعریف می‌شود. حالا دیگر سرعتِ متوسط یک بردار است. سرعتِ لحظه‌ای هم درست شبیهِ حالتِ یک‌بُعدی تعریف می‌شود.

$$\bar{\mathbf{v}}=\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t},$$

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \tag{28}$$

آن‌چه در شکلِ (۲—۲۹) می‌بینید منحنی‌یِ مکان—مکان است. بردارِ سرعتِ لحظه‌ای مماسِ بر منحنی‌یِ مکان—مکان است. در مختصاتِ دکارتی حرکتِ دوبُعدی تعمیمِ ساده ای از حرکتِ یک‌بُعدی است. بردارِ سرعتِ لحظه‌ای را به دو مؤلفه‌یِ v_x و v_y می‌توانیم تجزیه کنیم.

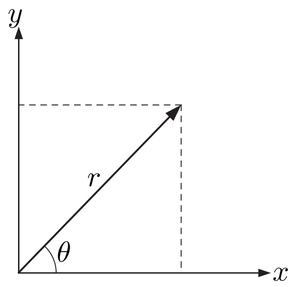
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$
$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{29}$$

گاهی اوقات از نماد نقطه‌ای بالای کمیت به عنوانِ علامتِ مشتق‌گیری از همان کمیت نسبت به زمان استفاده می‌شود، مثلاً روابطِ بالا به صورتِ زیر در می آیند

$$v_x = \dot{x},$$
$$v_y = \dot{y}. \tag{30}$$

اگر از کمیتی چندبار نسبت به زمان مشتق گیری شود به تعدادِ دفعاتِ مشتق‌گیری نقطه بالایِ آن کمیت گذاشته می‌شود، مثلاً $\dot{v}_x = \ddot{x}$.

توجه داریم که در دوبُعد دو منحنی‌یِ مکان—زمانِ $x-t$ و $y-t$ داریم. در اولی شیبِ منحنی v_x و در دومی v_y است. شیبِ منحنی‌یِ مکان—مکانِ $x-y$، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v_y}{v_x}$ است. منحنی‌هایِ v_x و v_y بر حسبِ زمان نیز حاوی‌یِ اطلاعاتی است. سطحِ زیرِ این دو منحنی در فاصله‌یِ زمانی‌یِ Δt، مؤلفه‌یِ xِ جابه‌جایی‌یِ ذره Δx و مؤلفه‌یِ yِ جابه‌جایی‌یِ ذره Δy است. تعریفِ شتابِ متوسط و شتابِ لحظه‌ای در دوبُعد هم تعمیمِ ساده‌ای از تعریفِ شتابِ متوسط و شتابِ لحظه‌ای در یک‌بُعد هستند.



شکل ۲—۳۰: مختصاتِ قطبی

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t},$$
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \tag{31}$$

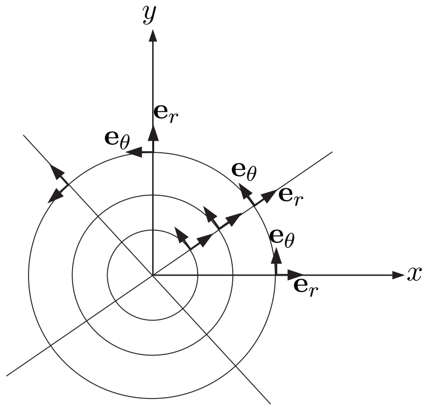
در مختصاتِ دکارتی شتابِ لحظه‌ای در دوبُعد شبیهِ حالتِ یک‌بُعدی است.

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x},$$
$$a_y = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y}. \tag{32}$$

۲—۲—۲ مختصاتِ قطبی

به جایِ دو مختصه‌یِ طولِ x و y می‌توانیم از دو مختصه‌یِ r و θ که یکی طول و دیگری زاویه است استفاده کنیم. شکلِ (۲—۳۰) را ببینید.

$$\begin{cases} r := \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta := \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x =: r\cos\theta, \\ y =: r\sin\theta. \end{cases} \tag{33}$$



شکل ۲—۳۱: بردارهایِ یکه مربوط به مختصاتِ قطبی

بردارِ یکه‌یِ $\mathbf{e}_r$ به طورِ نقطه‌ای عوض می‌شود. این بردار در هر نقطه برداری است عمود بر خمِ r—ثابت در آن نقطه. خمِ r—ثابت یک دایره است. این بردار در جهتِ افزایشِ r است، و اندازه‌اش نیز واحد است. بردارِ یکه‌یِ $\mathbf{e}_\theta$ برداری است عمود بر خمِ θ—ثابت در آن نقطه که خطی شعاعی است. این بردار در جهتِ افزایشِ θ است، و اندازه‌اش نیز واحد است. بردارِ مکانِ ذره $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$ است. همان‌طور که در شکلِ (۲—۳۱) هم دیده می‌شود بردارهایِ یکه‌یِ $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ از یک نقطه به نقطه‌یِ دیگر فرق می‌کنند و در هر نقطه به مختصه‌یِ θ یِ آن نقطه بستگی دارند. هر چند که مرسوم نیست شاید به‌تر بود که آن‌ها را به صورتِ $\mathbf{e}_r(\theta)$ و $\mathbf{e}_\theta(\theta)$ نمایش دهیم. مثلاً

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r(\theta = 0) = \mathbf{i}, \\ \mathbf{e}_\theta(\theta = 0) = \mathbf{j} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{e}_r(\theta = \frac{\pi}{2}) = \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_\theta(\theta = \frac{\pi}{2}) = -\mathbf{i} \end{cases}, \tag{34}$$

و در حالتِ کلی

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r(\theta) = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta, \\ \mathbf{e}_\theta(\theta) = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta. \end{cases} \tag{35}$$

فرقِ اساسیِ این بردارها با $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ در این نکته است که از نقطه‌ای به نقطه‌یِ دیگر $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ عوض می‌شوند. این بردارها به θ بستگی دارند ولی مستقل از r هستند. $\mathbf{e}_r$ در دو نقطه‌ی بسیار نزدیک که یکی با زاویه‌یِ قطبیِ θ و دیگری با زاویه‌یِ قطبیِ $\theta + \delta\theta$ است، متفاوتند.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r(\theta + \delta\theta) &= \mathbf{i}\cos(\theta + \delta\theta) + \mathbf{j}\sin(\theta + \delta\theta) \\ &= \mathbf{i}(\cos\theta\cos\delta\theta - \sin\theta\sin\delta\theta) + \mathbf{j}(\sin\theta\cos\delta\theta + \cos\theta\sin\delta\theta) \\ &\approx \mathbf{i}(\cos\theta - \sin\theta\ \delta\theta) + \mathbf{j}(\sin\theta + \cos\theta\ \delta\theta) \\ &\approx \mathbf{e}_r(\theta) - \mathbf{i}\sin\theta\ \delta\theta + \mathbf{j}\cos\theta\ \delta\theta \\ &\approx \mathbf{e}_r(\theta) + \mathbf{e}_\theta(\theta)\ \delta\theta. \end{aligned} \tag{36}$$

در این محاسبه از تقریب‌هایِ

$$\begin{aligned} \cos\delta\theta &\approx 1 - \frac{1}{2!}(\delta\theta)^2 + \cdots, \\ \sin\delta\theta &\approx \delta\theta - \frac{1}{3!}(\delta\theta)^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{37}$$

استفاده کرده‌ایم. در ضمن چون $\delta\theta$ را کوچک گرفته‌ایم، جمله‌های از مرتبه‌یِ $(\delta\theta)^2$ و بالاتر از آن را دور ریخته‌ایم. نتایجِ بالا را با مشتق‌گیریِ صریح نیز می‌توانیم به دست آوریم

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{e}_r(\theta) &= -\mathbf{i}\sin\theta\ \mathrm{d}\theta + \mathbf{j}\cos\theta\ \mathrm{d}\theta = \mathbf{e}_\theta(\theta)\ \mathrm{d}\theta, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_\theta(\theta) &= -\mathbf{i}\cos\theta\ \mathrm{d}\theta - \mathbf{j}\sin\theta\ \mathrm{d}\theta = -\mathbf{e}_r(\theta)\ \mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{38}$$

توجه داریم که در مشتق گیری هم جمله‌های از مرتبه‌یِ دو و بالاتر از آن دور ریخته می‌شود. جورِ دیگری هم می‌شود این نتیجه را به دست آورد. تغییراتِ هر برداری دو بخش دارد یکی تغییرِ اندازه‌یِ بردار است و دیگری تغییرِ جهتِ بردار. برداری که اندازه‌اش ثابت است، مثلِ بردارِ یکه، تغییرش تنها تغییر جهت است. یعنی تغییراتِ برداری که اندازه‌اش ثابت است حتماً بر خودش عمود است. به همین دلیل است که تغییرات بردارِ یکه‌یِ $\mathbf{e}_r(\theta)$ در راستایِ $\mathbf{e}_\theta(\theta)$ است.

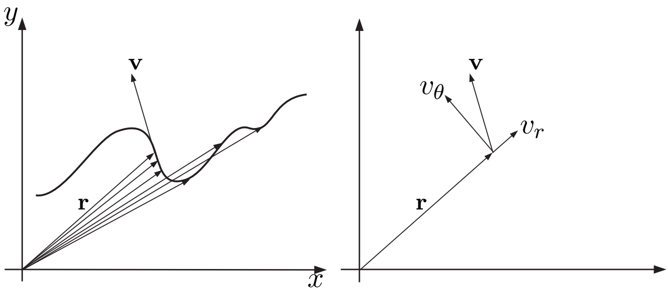
به دست آوردنِ مؤلفه‌هایِ بردارِ سرعت در دستگاهِ قطبی کمی پیچیده‌تر از دستگاهِ دکارتی است. شکلِ (۲—۳۲) را ببینید. در مختصاتِ قطبی بردارِ مکان $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ است. سرعتِ لحظه‌ای‌یِ متحرکی که در فضایی دو بُعدی حرکت می‌کند، برداری است که می‌توانیم آن را به دو مؤلفه‌یِ در راستایِ $\mathbf{r}$ و عمود بر $\mathbf{r}$ تجزیه کنیم. این مؤلفه‌ها را با v_r و v_θ نمایش می‌دهیم.[3]

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta,$$
$$v_r = \dot{r},$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}. \tag{39}$$

که در آن $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ و $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ است و در این محاسبه از (38) استفاده کرده‌ایم. چنان‌که از شکلِ (۲—۳۲) هم پیداست، v_r به تغییرِ اندازه‌یِ $\mathbf{r}$ بر حسبِ زمان و v_θ به تغییرِ جهتِ $\mathbf{r}$ بر حسبِ زمان مربوط است. اگر ذره رویِ دایره‌ای به مرکزِ مبدأِ مختصات حرکت کند، اندازه‌یِ $\mathbf{r}$ ثابت است و جهتِ آن تغییر می‌کند. در این حالت $v_r = 0$ است. اگر ذره رویِ خطی که از مبدأِ مختصات می‌گذرد حرکت کند، جهتِ $\mathbf{r}$ ثابت

[3] در مشتق‌گیری باید از قاعده‌یِ لایپنیتز استفاده کنیم. مطابقِ این قاعده

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \frac{dA(t)}{dt}B(t) + A(t)\frac{dB(t)}{dt}.$$



شکل ۲—۳۲: سرعتِ لحظه‌ای در دوبُعد را می‌توانیم در دو راستایِ $\mathbf{r}$ و عمود بر $\mathbf{r}$ تجزیه کنیم.

است ولی اندازه‌یِ آن تغییر می‌کند. در این حالت $v_\theta = 0$ است. شکلِ (۲—۳۳) را ببینید. در مختصاتِ قطبی شکلِ شتاب هم‌چنان از دستگاهِ دکارتی پیچیده‌تر است. مؤلفه‌هایِ شتاب در دستگاهِ قطبی را با a_r و a_θ نمایش می‌دهیم.

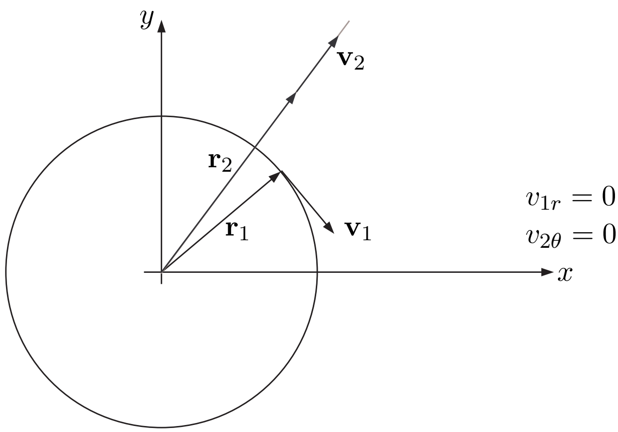
$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta(\theta)) \\
\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta, \\
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.
\end{aligned} \tag{40}$$

در این محاسبه از (38) استفاده کرده‌ایم.

در حالتِ کلی بردارِ سرعتِ ذره $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_v$ است که $\mathbf{e}_v$ بردارِ یکه‌یِ مماس بر مسیر است. با مشتق‌گیری از $\mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_v = 1$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_v}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{e}_v = 0. \tag{41}$$

پس تغییراتِ بردارِ یکه بر بردارِ یکه عمود است. این نتیجه‌ای است که برایِ هر برداری با اندازه‌یِ ثابت برقرار است.



شکل ۲—۳۳: سرعتِ لحظه‌ای دو متحرک که یکی حرکتی دایره‌ای دارد و دیگری رویِ خطی شعاعی از مبدأ دور می‌شود.

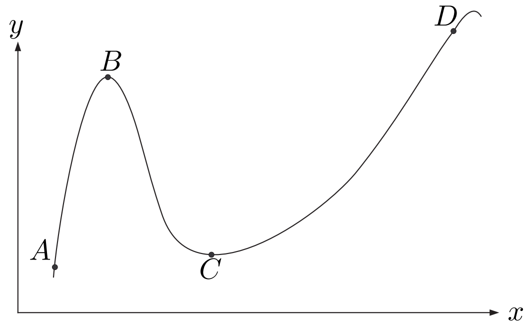
$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_v}{\mathrm{d}t} + \mathbf{e}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{42}$$

شتابِ ذره در هر نقطه از مسیر به دو بردارِ مماس بر مسیر و عمود بر آن تجزیه می‌شود. آن بخش از شتاب که مماس بر مسیر است را شتابِ مماسی، $\mathbf{a}_\parallel$، و آن بخش که عمود بر مسیر است را شتابِ عمودی، $\mathbf{a}_\perp$، می‌نامیم.

$$\mathbf{a}_\parallel = \mathbf{e}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

$$\mathbf{a}_\perp = v\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_v}{\mathrm{d}t}. \tag{43}$$

مثالِ7) ذره‌ای در مسیرِ مسطحی که در شکلِ (۲—۳۴) نشان داده شده با سرعتِ یک‌نواخت حرکت می‌کند. می‌خواهیم ببینیم که در کدام نقطه اندازه‌یِ شتابِ ذره بیشترین مقدار است. چون سرعت یک‌نواخت است در زمانِ Δt فقط جهتِ سرعت



شکل ۲—۳۴: شکلِ مربوط به مثالِ 7.

تغییر می‌کند. چون اندازه‌ی سرعت ثابت است $\mathbf{a}_{\parallel} = 0$. در یک بازه‌ی زمانیِ معین تغییرِ جهتِ سرعت در نقطه‌ی B بیش‌ترین مقدار است. بنا بر این بیش‌ترین شتابِ ذره در نقطه‌ی B است.

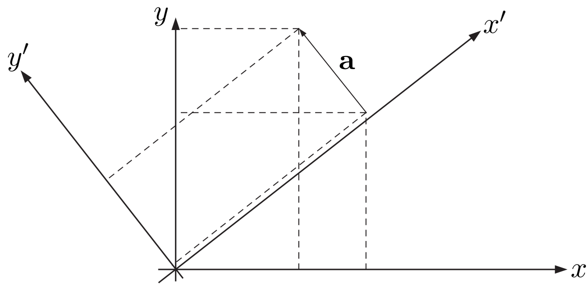
۲—۲—۳ حرکت با شتابِ ثابت

ذره‌ای را در نظر بگیرید که با شتابِ ثابتِ $\mathbf{a}$ در دوبُعد حرکت می‌کند. چون شتاب ثابت است

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{a}\Delta t, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t. \tag{44}$$

که $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ سرعتِ اولیه‌ی ذره است. اگر مؤلفه‌های x و yِ این معادله‌ی برداری را بنویسیم دو معادله‌ی اسکالرِ زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t, \\ v_y &= v_{0y} + a_y t. \end{aligned} \tag{45}$$



شکل ۲—۳۵: حرکت با شتابِ ثابت در دوبُعد را همواره می‌توان به مسئله‌ای که شتاب تنها یک مؤلفه دارد تبدیل کرد.

بنا بر این حرکت با شتابِ ثابت در دو بُعد مثلِ دو تا حرکتِ یک بُعدی با شتابِ ثابت است. جابه‌جاییِ ذره

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2. \tag{46}$$

یا

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \\ y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2. \end{aligned} \tag{47}$$

در کلی‌ترین حالت چنان‌که در شکلِ (۲—۳۵) هم می‌بینیم، با دورانِ دستگاهِ مختصات می‌توانیم چارچوبی پیدا کنیم که بردارِ شتاب در راستایِ یکی از محورها باشد. در چارچوبِ xy، $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$، ولی در چارچوبِ $x'y'$، $a'_x = 0$، و $a = a_{y'}$. با انتخابِ چارچوبی که شتاب تنها یک مؤلفه، مثلاً $a = a_y$، دارد معادلاتِ (47) به صورتِ زیر در می آیند

$$x = v_{0x}t,$$

$$y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{48}$$

در این‌جا علامتِ پریم را برداشته‌ایم و برایِ سادگی مکانِ اولیه را مبدأ ِمختصات گرفته‌ایم. همان‌طور که می‌بینید مسئله‌یِ حرکتِ دوبُعدی با شتابِ ثابت به دو مسئله‌یِ یک‌بُعدی یکی حرکتِ یک‌نواخت در راستایِ محورِ x و دیگری حرکتی با شتابِ ثابت در راستایِ y تبدیل می‌شود. با حذفِ زمان می‌توانیم رابطه‌ای بینِ x و y به دست آوریم. این معادله معادله‌یِ مسیر است.

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\ x + \frac{a}{2 v_{0x}^2}\ x^2, \tag{49}$$

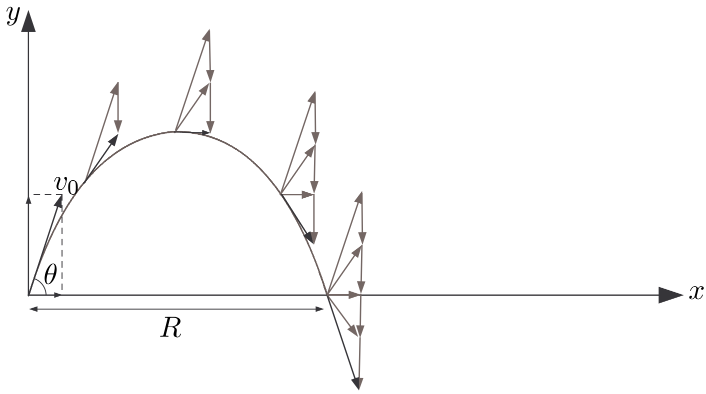
معادله‌یِ مسیر معادله‌یِ یک سهمی است.

معروف‌ترین مثالِ حرکت با شتابِ ثابت در دو بُعد، حرکتِ پرتابی تحتِ اثرِ نیرویِ گرانشِ زمین و در غیابِ مقاومتِ هوا است. در حرکتِ پرتابی‌یِ واقعی مقاومتِ هوا وجود دارد ولی اگر فقط گرانش را در نظر بگیریم و از مقاومتِ هوا چشم‌پوشی کنیم، شتابِ حرکت $\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g\mathbf{j}$ ثابت است. فرض کنید ذره ای از مبدأ و با سرعتِ اولیه‌یِ $\mathbf{v}_0$ که با اُفق زاویه‌یِ θ می‌سازد پرتاب می‌شود. در این‌صورت

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta, \\ v_y &= v_0 \sin\theta - gt. \end{aligned} \tag{50}$$

معادلاتِ حرکت و معادله‌یِ مسیر عبارت اند از

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos\theta\ t, \\ y &= v_0 \sin\theta\ t - \frac{1}{2} g t^2, \\ y &= x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}. \end{aligned} \tag{51}$$



شکل ۲—۳۶: در حرکتِ پرتابی تغییرِ سرعت در واحدِ زمان ثابت است. این تغییرِ سرعت در راستایِ قائم است.

چنان‌که در شکلِ (۲—۳۶) نیز می‌بینیم با گذشتِ زمان v_x ثابت می‌ماند، ولی v_y به طورِ خطی با زمان کاهش پیدا می‌کند. شتابِ $\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$، و تغییرِ سرعت در هر فاصله‌یِ زمانی‌یِ δt، $\delta\mathbf{v} = -g\delta t\mathbf{j}$ است.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t-\delta t) - g\delta t\mathbf{j}. \tag{52}$$

چند کمیت است که در حرکتِ پرتابی به سادگی قابلِ محاسبه است.

الف) بُرد— بُرد جایی است که مجدداً $y = 0$ می‌شود. برایِ محاسبه کافی است که در معادله‌یِ مسیر y را صفر قرار دهیم. یک جوابِ بدیهی همان $x = 0$ است. جوابِ دوم از رابطه‌یِ زیر به دست می‌آید.

$$\tan\theta - \frac{gR}{2v_0^2\cos^2\theta} = 0 \quad\Rightarrow\quad R = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}. \tag{53}$$

بُرد به زاویه‌یِ پرتاب بستگی دارد، $R = R(\theta)$. بیشینه‌یِ بُرد وقتی است که $\sin 2\theta = 1$ شود. از این‌جا زاویه‌یِ پرتاب برایِ بُردِ بیشینه $\theta = \pi/4$ به دست می‌آید. پرتابه‌هایی که زاویه‌یِ پرتابِشان نسبت به $\pi/4$ متقارن است، یک بُرد دارند،

$$R(\pi/4+\alpha) = R(\pi/4-\alpha) = \frac{v_0^2 \sin(\pi/2 \pm 2\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \cos 2\alpha}{g}. \qquad (54)$$

ب) اُوج — زمانی که ذره به اُوج می‌رسد، یعنی زمانِ T، ذره دیگر بالا نمی‌رود. در این زمان مولفه‌یِ قائمِ سرعت صفر می‌شود. پس $v_y(T) = 0$ و

$$T = \frac{v_0 \sin\theta}{g}. \qquad (55)$$

مکانِ نقطه‌یِ اُوج با جاگذاری‌یِ T در (51) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} x(T) &= \frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}, \\ y(T) &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}. \end{aligned} \qquad (56)$$

مؤلفه‌یِ x بردارِ مکانِ پرتابه در نقطه‌یِ اُوج نصفِ بُرد است.

منحنی‌یِ مسیرِ پرتابه نسبت به محورِ قائمی که از نقطه‌یِ اُوج می‌گذرد متقارن است. برایِ فهمِ این مطلب توجه به این نکته لازم است که وقتی پرتابه در اُوج است سرعتِ آن افقی است. پرتابه پس از مدتی به زمین می‌رسد. اگر هنگامی که پرتابه در اُوج است جهتِ زمان را عکس کنیم، سرعتِ پرتابه منفی می‌شود، و پرتابه درست در همان مسیری که پرتاب شده بود برمی‌گردد. این مسیر تصویرِ آیینه‌ای‌یِ مسیر نسبت به صفحه‌یِ قائمی است که از نقطه‌یِ اُوج می‌گذرد و بر بردارِ سرعت عمود است. از

رابطه‌یِ (56) هم پیداست که مؤلفه‌یِ xِ بردارِ مکانِ پرتابه در نقطه‌یِ اُوج نصفِ بُرد است.

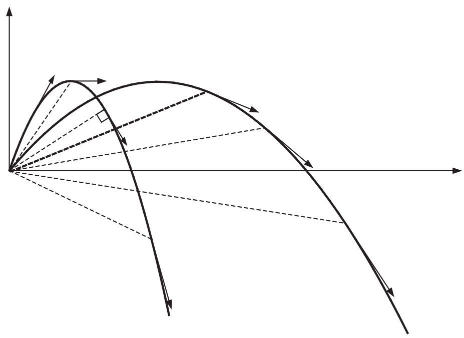
مثالِ8) در حرکتِ پرتابی پرتابه در ابتدا از نقطه‌یِ پرتاب دور می‌شود. به ازایِ بعضی از مقادیرِ زاویه‌یِ پرتاب، پرتابه هم‌واره از مبدأ دور می‌شود. اما زوایایِ پرتابی نیز وجود دارد که ابتدا ذره از مبدأ دور، سپس به آن نزدیک و مجدداً از آن دور می‌شود. اوایلِ حرکت زاویه‌یِ بین بردارِ مکان و بردارِ سرعت تقریباً صفر است. شکلِ (۲—۳۷) را ببینید. در زمان‌هایی که پرتابه مجدداً به زمین نزدیک می‌شود زاویه‌یِ بینِ آن دو حاده است. به ازایِ بعضی از مقادیرِ زاویه‌یِ پرتاب، زاویه‌یِ بین بردارِ مکان و بردارِ سرعت در ابتدا حاده است ولی پس از مدتی این زاویه منفرجه و مجدداً حاده می‌شود. البته اگر هم این اتفاق رخ دهد حتماً قبل از این است که پرتابه مجدداً به زمین برسد، چون وقتی که به سطحِ نقطه‌یِ پرتاب برسد یا آن‌که از آن بگذرد زاویه‌یِ بین بردارِ مکان و بردارِ سرعت حاده و پرتابه در حالِ دورشدن از نقطه‌یِ پرتاب است. زمان‌هایی که زاویه‌یِ بینِ بردارِ مکان و بردارِ سرعت منفرجه است، پرتابه به مبدأ نزدیک می‌شود. برایِ آن‌که پرتابه هم‌واره از نقطه‌یِ پرتاب دور شود زاویه‌یِ بین بردارِ مکان و بردارِ سرعت حداکثر باید قائمه باشد. این مطلب را جورِ دیگری هم می‌شود دید. اگر از r^2 یا $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$ نسبت به زمان مشتق بگیریم، نتیجه $2\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}$ است[4]. جایی که r^2 بیشینه می‌شود جایی است که بردارِ سرعت بر بردارِ مکان عمود شده. در این نقطه تغییرِ اندازه‌یِ r صفر است، و فقط جهتِ $\mathbf{r}$ عوض می‌شود.

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = v_0\cos\alpha, \\ \dot{y} = v_0\sin\alpha - gt \end{cases}$$

[4] در مشتق‌گیری ازضربِ داخلیِ دو تابعِ برداریِ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$، اگر از تعریفِ

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(t+\Delta t)\cdot B(t+\Delta t) - A(t)\cdot B(t)}{\Delta t}$$

که برای مشتق‌گیری داریم استفاده کنیم نتیجه $\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{B}}$ می‌شود، درست شبیهِ آن‌چیزی که در مشتق‌گیری از حاصل‌ضربِ دو تابعِ اسکالر به دست می‌آید.



شکل ۲—۳۷: در حرکتِ پرتابی برایِ زوایایِ پرتابِ کوچک‌تر از $\alpha := \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}$ هم‌واره از نقطه‌یِ پرتاب دور می‌شوند.

شرطِ این که پرتابه مجدداً به مبدأ نزدیک شود این است که

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \Rightarrow \quad \dot{x}x + \dot{y}y = 0.$$

با جاگذاری‌یِ x، y، $\dot{x}$، و $\dot{y}$ نتیجه می‌شود،

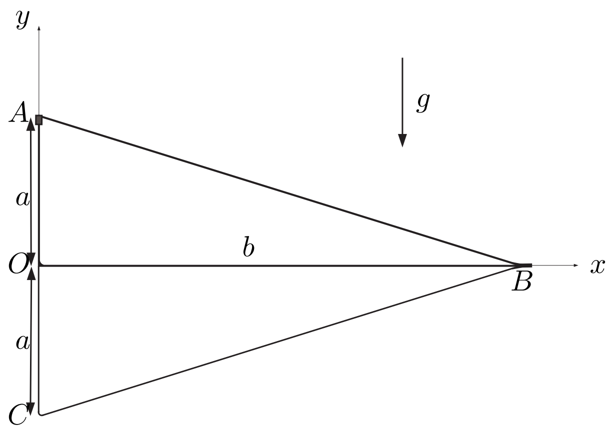
$$\frac{1}{2}g^2t^2 - \frac{3}{2}\ v_0gt\sin\alpha + v_0^2 = 0.$$

در صورتی که این معادله جواب داشته باشد پرتابه پس از پرتاب مجدداً به مبدأ نزدیک می‌شود. این شرط عبارت است از

$$\Delta > 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4}v_0^2g^2\sin^2\alpha > 2v_0^2g^2,$$

که از این‌جانتیجه می‌شود $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

مثالِ9) سه دانه‌یِ تسبیحِ بسیار کوچک با جرم‌هایِ یک‌سانِ m می‌توانند از نقطه‌یِ A بدونِ اصطکاک رویِ سه سیم بلغزند. یک سیم AB، دیگری AOB، و سومی ACB است. هر سه سیم در انتها یعنی نقطه‌یِ B افقی شده اند. هر جا که سیم‌ها خم شده‌اند انحنایِ کوچکی وجود دارد به طوری که دانه‌یِ تسبیح این نقاط را به راحتی دور



شکل ۲—۳۸: حرکتِ یک دانه‌یِ تسبیح در سه مسیرِ مختلف. مربوط به مثالِ 9.

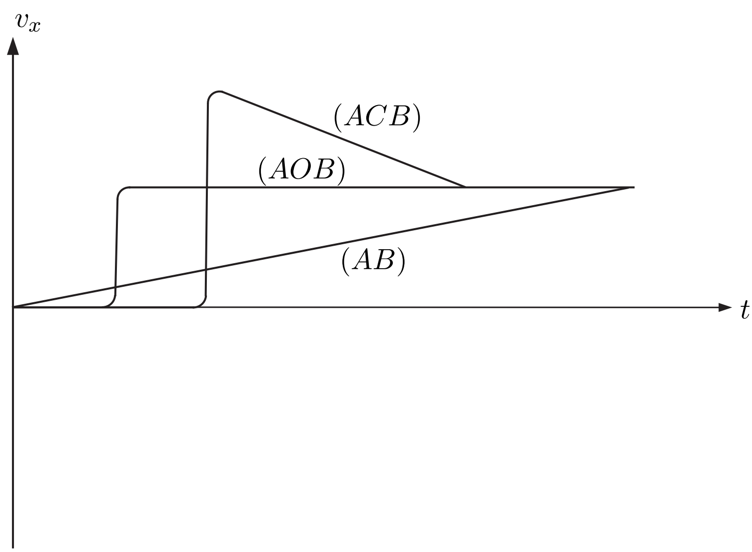
می‌زند و اندازه‌یِ سرعت درست قبل و پس از این نقاط یکی است. شکلِ (۲—۳۸) را ببینید.

الف) منحنی‌هایِ v_x بر حسبِ t را برایِ سه دانه‌یِ تسبیح به طورِ کیفی بکشید.

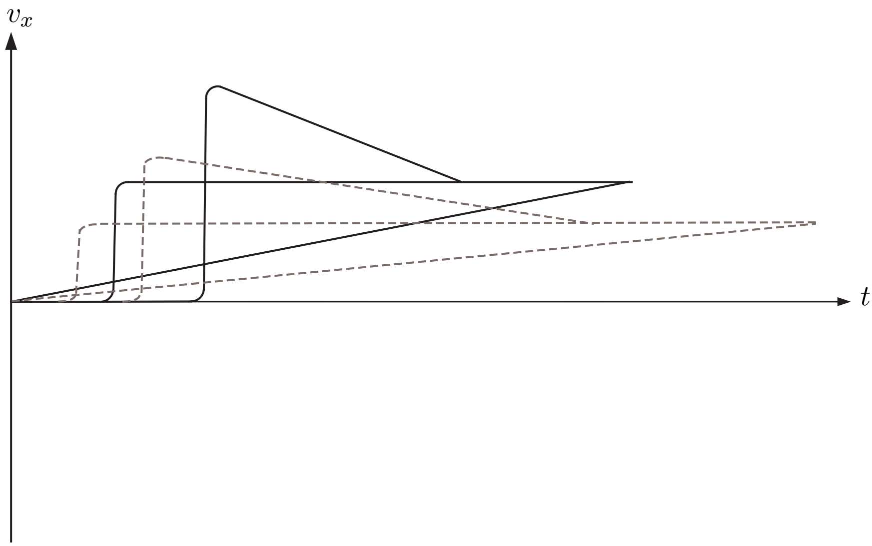
ب) زمانِ رسیدنِ هرکدام از تسبیح‌ها به نقطه‌یِ B از سه مسیرِ مختلف را $T_1 := T_{AB}$، $T_2 := T_{AOB}$، $T_3 := T_{ACB}$ بنامید. این زمان‌ها را حساب کنید.

ج) در حدِّ $a/b \to 0$، یعنی در حدّی که شکلِ سه سیم به هم نزدیک می‌شود، نسبتِ T_2/T_1 و T_3/T_1 را حساب کنید.

منحنی‌یِ v_x بر حسبِ زمان برایِ حرکتِ دانه‌یِ تسبیح در سه مسیرِ مختلفِ AB، دیگری AOB، و سومی ACB را در شکلِ (۲—۳۹) ببینید. اگر a/b کوچک شود، یعنی b ثابت بماند و a کوچک شود، منحنی‌هایِ v_x بر حسبِ t تغییر می‌کنند. سرعتِ نهایی هم کوچک‌تر می‌شود ولی سطحِ زیرِ منحنی‌یِ v_x بر حسبِ t که همان جابه‌جایی‌یِ در راستایِ x، یعنی b است ثابت می‌ماند. شکلِ (۲—۴۰) را ببینید. بیایید T_1، T_2، T_3 را حساب کنیم. در مسیرِ AB دانه با شتابِ ثابتِ $g\sin\theta$ از سیم پایین



شکل ۲—۳۹: منحنی‌یِ v_x بر حسبِ زمان برایِ حرکتِ دانه‌یِ تسبیح در سه مسیرِ مختلف. مربوط به مثالِ 9.



شکل ۲—۴۰: منحنی‌یِ v_x بر حسبِ زمان برایِ حرکتِ دانه‌یِ تسبیح در سه مسیرِ مختلف. مربوط به مثالِ 9.

می‌آید، که θ شیبِ سیم است.

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{57}$$

کلِ مسافتی که دانه طی می‌کند $\sqrt{a^2+b^2}$ است. پس

$$T_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{ga/\sqrt{a^2+b^2}}} = \sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{ga}}. \tag{58}$$

مسیرِ AOB را به دو بخشِ AO و OB تقسیم می‌کنیم. زمانِ بخشِ اول را T_2' و زمانِ بخشِ دوم را T_2'' می‌گیریم.

$$T_2' = \sqrt{\frac{2a}{g}}. \tag{59}$$

سرعت در انتهایِ بخشِ اولِ مسیر $v_2 = \sqrt{2ag}$ است. در بخشِ دومِ مسیر سرعت ثابت می‌ماند.

$$T_2'' = \frac{b}{\sqrt{2ag}}. \tag{60}$$

پس

$$T_2 = T_2' + T_2'' = \sqrt{\frac{2a}{g}} + \frac{b}{\sqrt{2ag}}. \tag{61}$$

مسیرِ ACB را نیز به دو بخشِ AC و CB تقسیم می‌کنیم. زمانِ بخشِ اول را T_3' و زمانِ بخشِ دوم را T_3'' می‌گیریم.

$$T_3' = \sqrt{\frac{4a}{g}}. \tag{62}$$

سرعت در انتهایِ بخشِ اولِ مسیر $v_3 = \sqrt{4ag}$ است. در بخشِ دومِ مسیر شتاب ثابت است. سرعتِ نهاییِ دانه از رابطه‌یِ زیر به دست می‌آید.

$${v_3'}^2 - v_3^2 = -2g\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{a^2+b^2} = -2ag, \quad \Rightarrow \quad v_3' = \sqrt{2ag}. \tag{63}$$

زمانِ بخشِ دوم عبارت است از

$$T_3'' = \frac{v_3' - v_3}{-g\sin\theta} = \frac{\sqrt{4ag} - \sqrt{2ag}}{ga/\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{64}$$

پس

$$T_3 = T_3' + T_3'' = \sqrt{\frac{4a}{g}} + \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{ga}} \tag{65}$$

حالا بیایید T_1، T_2، T_3 را در حدّ ِ $a/b \to 0$ حساب کنیم.

$$T_1 = b\sqrt{\frac{2}{ga}}(1+\frac{a^2}{b^2})^{1/2} = b\sqrt{\frac{2}{ga}}(1+\frac{a^2}{2b^2}+\cdots) \approx b\sqrt{\frac{2}{ga}},$$
$$T_2 = \sqrt{\frac{2a}{g}} + \frac{b}{\sqrt{2ag}} = \frac{b}{\sqrt{2ag}}(1+\frac{2a}{b}) \approx \frac{b}{\sqrt{2ag}},$$
$$T_3 = \sqrt{\frac{4a}{g}} + \frac{b(2-\sqrt{2})}{\sqrt{ga}}(1+\frac{a^2}{b^2})^{1/2}$$
$$= \sqrt{\frac{4a}{g}} + \frac{b(2-\sqrt{2})}{\sqrt{ga}}(1+\frac{a^2}{2b^2}+\cdots) \approx \frac{b(2-\sqrt{2})}{\sqrt{ga}}. \quad (66)$$

همه‌یِ این زمان‌ها در حدِّ $a/b \to 0$، بی‌نهایت می‌شوند. اما نسبتِ آن‌ها به مقادیرِ ثابتی میل می‌کند.

$$\lim_{a/b\to 0}\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{a/b\to 0}\left(\frac{T_3}{T_1}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \quad (67)$$

مثالِ10) از مبدأ مختصات گلوله‌هایی با سرعت اولیه‌ی یکسان v_0، با زاویه‌های مختلف α، و همگی در صفحه‌ی xy به بالا پرتاب می‌کنیم. گرانش در جهت $-y$، و اندازه‌ی شتاب گرانش g است. تعریف می‌کنیم $a = \frac{v_0^2}{4\,g}$. مختصات نقاط اوج این گلوله‌ها در چه معادله‌ای صدق می‌کند؟

مختصاتِ نقطه‌یِ اوج را در (56) به دست آوردیم.

$$x = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = 2a\sin 2\alpha,$$
$$y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = a(1-\cos 2\alpha) \quad (68)$$

بسته به این‌که α چه‌قدر باشد محلِ اوجِ پرتابه‌ها فرق می‌کند. با حذفِ α بینِ این دو معادله به معادله‌یِ زیر بینِ x و y می‌رسیم که برایِ همه‌یِ پرتابه‌ها صادق است.

$$\frac{x^2}{4\,a^2} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1. \tag{69}$$

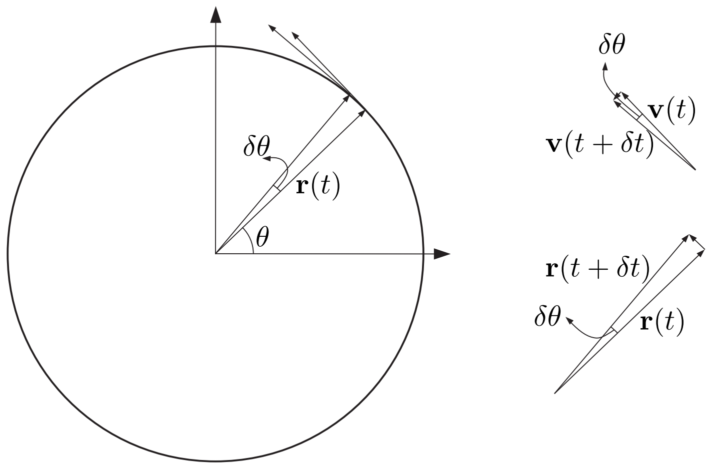
این معادله‌یِ یک بیضی است. توجه داریم که تنها برایِ پرتاب‌هایی با $0 < \alpha < \pi$ در $T > 0$ نقطه‌یِ اوج وجود دارد. برایِ پرتاب‌هایِ به سمتِ پایین مثلِ این است که پرتابه‌ها قبلاً یعنی در $T < 0$ در اوج بوده‌اند.

۲—۲—۴ حرکتِ دایره‌ای

ذره‌ای را در نظر بگیرید که مسیرش دایره‌ای به شعاعِ R است، در این صورت $|\mathbf{r}| = R$. با نمادگذاری‌یِ شکلِ (۲—۳۳)، $v_r = 0$. چون در حینِ حرکت جهتِ سرعت عوض می‌شود حتماً حرکتش شتاب‌دار است. بیایید این مطلب را کمّی‌تر و به زبانِ معادله‌هایِ ریاضی به دست آوریم. اگر مبدأ را مرکزِ دایره‌یِ مسیر بگیریم، بردارِ مکانِ چنین ذره‌ای $\mathbf{r} = R\mathbf{e}_r$ است. بردارِ سرعتِ آن

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_r}{\mathrm{d}t} \\
&= R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}_\theta.
\end{aligned} \tag{70}$$

در این‌جا از (38) استفاده کرده‌ایم. این رابطه معرفِ این است که بردارِ سرعتِ ذره در راستایِ $\mathbf{e}_\theta$ یعنی مماس بر دایره‌یِ مسیر است. این چیزی است که از قبل انتظارش را داشتیم. از طرفِ دیگر اندازه‌یِ سرعت متناسب با شعاعِ دایره R است. در مدت‌زمانِ δt، کمانِ پیموده رویِ دایره $\delta s = R\delta\theta$ است. اگر اندازه‌یِ سرعتِ ذره ثابت باشد، کمانِ پیموده شده رویِ دایره در واحدِ زمان $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t := R\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ ثابت است. به $\omega := \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ که زاویه‌یِ پیموده شده توسطِ ذره در واحدِ زمان است، سرعتِ زاویه‌ای گفته می‌شود و واحدش s^{-1} است. به حرکتی که اندازه‌یِ سرعتِ ذره رویِ دایره عوض نشود، حرکتِ دایره‌ایِ یک‌نواخت می‌گوییم. در حرکتِ دایره‌ایِ یک‌نواخت سرعتِ زاویه‌ای، ω،



شکل ۲—۴۱: سرعت و شتاب در دستگاهِ قطبی.

یا در واقع زاویه‌یِ پیموده شده توسطِ ذره در واحدِ زمان ثابت است. هرچند در نامِ این حرکت یک‌نواخت وجود دارد، این حرکت شتاب‌دار است. شتابِ آن

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{e}_\theta\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}) \\ &= -R\omega^2\ \mathbf{e}_r. \end{aligned} \tag{71}$$

در این‌جا از (38) یا (40) وقتی که r ثابت است می‌توان استفاده کرد. در حرکتِ دایره‌ایِ یک‌نواخت شتاب برداری شعاعی و روبه‌مرکز است. به طورِ خلاصه در حرکتِ دایره‌ایِ یک‌نواخت داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= R\ \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{v} &= R\omega\ \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{a} &= -R\omega^2\mathbf{e}_r. \end{aligned} \tag{72}$$

بردارِ سرعت و شتاب را جورِ دیگری هم می‌شود به دست آورد. چون اندازه‌یِ بردارِ مکان R ثابت است مشتقِ آن یعنی بردارِ سرعت باید بر بردارِ مکان عمود باشد. بردارِ سرعت مماسِ بر مسیر است. اگر اندازه‌یِ سرعت ثابت باشد بردارِ شتاب هم باید بر بردارِ سرعت عمود باشد پس بردارِ شتاب باید در راستایِ شعاع باشد. در شکلِ (۲—۴۱) می‌بینیم که

$$\begin{aligned} v &= \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{R\delta\theta}{\delta t} \\ \delta v &= v\delta\theta \end{aligned} \tag{73}$$

پس اندازه‌یِ شتاب عبارت است از

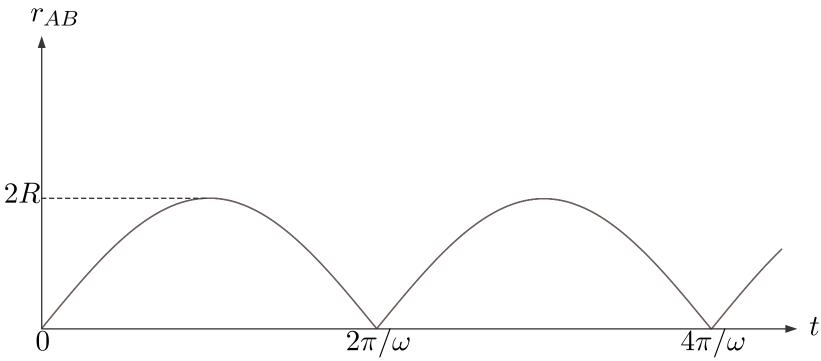
$$a \approx \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{v\delta\theta}{\delta t} = R\left(\frac{\delta\theta}{\delta t}\right)^2. \tag{74}$$

مثالِ 11) ذره‌یِ A با سرعتِ زاویه‌ای‌یِ ثابتِ ω رویِ دایره‌ای به شعاعِ R حرکت می‌کند. فاصله‌یِ ذره از یک نقطه‌یِ معینِ B رویِ محیطِ دایره چه‌گونه با زمان تغییر می‌کند؟

فرض کنیم A رویِ دایره پادساعتگرد می‌چرخد. مبدأ را مرکزِ دایره و نقطه‌یِ B را رویِ محورِ x بگیریم.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= R\cos\omega t\mathbf{i} + R\sin\omega t\mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_B &= R\mathbf{i}. \end{aligned} \tag{75}$$

از این‌جا فاصله‌یِ AB به دست می‌آید



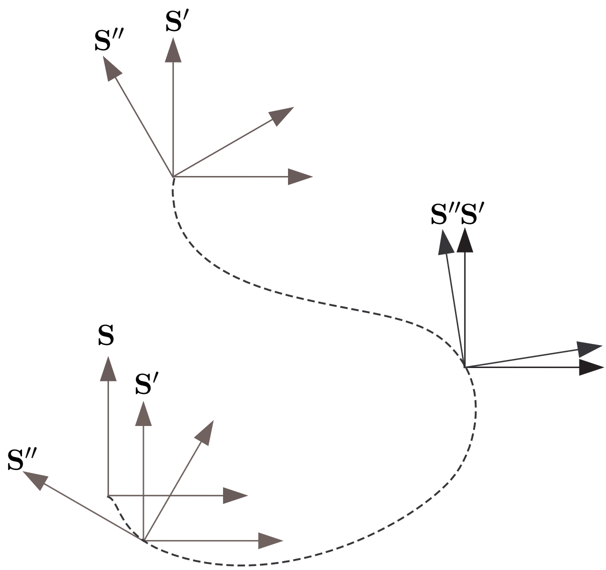
شکل ۲—۴۲: شکل مربوط به مثالِ 11.

$$\begin{aligned} r_{AB} &= |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B| = \sqrt{R^2(\cos\omega t - 1)^2 + R^2\sin^2\omega t} \\ &= R\sqrt{2 - 2\cos\omega t} = 2R|\sin\frac{\omega t}{2}|. \end{aligned} \tag{76}$$

همان‌طور که در شکلِ (۲—۴۲) هم می‌بینیم موقعِ نزدیک شدن ذره به نقطه‌یِ B، $\mathrm{d}r_{AB}/\mathrm{d}t < 0$ و درست پس از رد شدن از نقطه‌یِ B، $\mathrm{d}r_{AB}/\mathrm{d}t > 0$ است.

۲—۳ حرکتِ نسبی

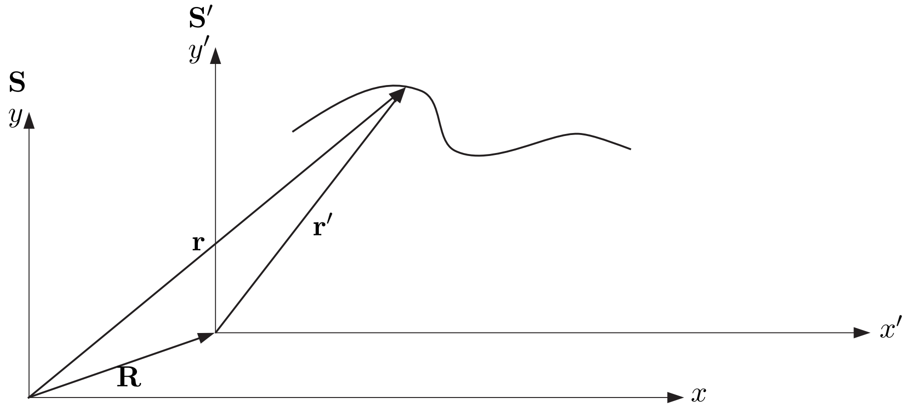
تا این‌جا ما از مکانِ ذره، یا سرعتِ آن نسبت به یک چارچوبِ ثابت صحبت کردیم. ممکن است به غیر از این چارچوب چارچوبِ دیگری نیز وجود داشته باشد، که ما علاقه‌مند باشیم از مکان یا سرعتِ ذره نسبت به آن نیز اطلاعاتی داشته باشیم. در حالتِ کلی این دو چارچوب ممکن است نسبت به هم حرکت کنند. ممکن است حینِ حرکت، محورهایِ دو چارچوب موازی بمانند. در این حالت می‌گوییم دو چارچوب



شکل ۲—۴۳: حرکتِ نسبیِ چارچوب‌هایِ $\mathbf{S}'$ و $\mathbf{S}''$ نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}$

نسبت به هم حرکتِ انتقالی دارند. ممکن است یکی از چارچوب‌ها نسبت به دیگری دوران نیز بکند، یعنی محورهایِ دو چارچوب موازی نمانند. شکلِ (۲—۴۳) را ببینید. چارچوبِ $\mathbf{S}'$ نسبت به $\mathbf{S}$ فقط حرکتِ انتقالی دارد. چارچوبِ $\mathbf{S}''$ نسبت به $\mathbf{S}'$ فقط حرکتِ دورانی دارد. چارچوبِ $\mathbf{S}''$ نسبت به $\mathbf{S}$ هم حرکتِ انتقالی و هم حرکتِ دورانی دارد. در حالتِ دوم زاویه‌یِ بینِ بردارهایِ یکه‌یِ دو چارچوب با زمان عوض می‌شود. ما در این‌جا بحثِ‌مان را محدود به چارچوب‌هایی می‌کنیم که فقط نسبت به هم حرکتِ انتقالی دارند و زاویه‌یِ بینِ بردارهایِ یکه‌شان ثابت است. دو چارچوبِ $\mathbf{S}$ و $\mathbf{S}'$ را با محورهایِ موازی با هم در نظر بگیرید. شکلِ (۲—۴۴) را ببینید. بردارِ مکانِ مبدأ ِچارچوبِ $\mathbf{S}'$ نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}$ را $\mathbf{R}$ بگیرید. در این صورت

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'. \tag{77}$$

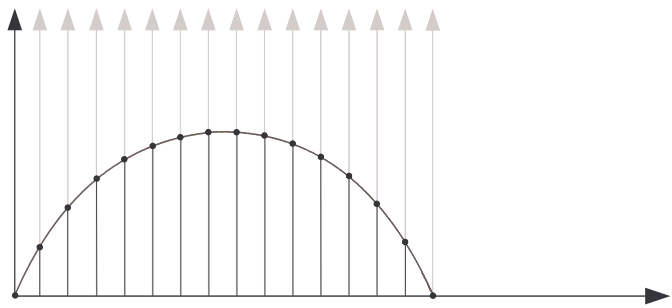


شکل ۲—۴۴:   حرکتِ نسبیِ‌ی چارچوبِ $\mathbf{S}'$ نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}$

که $\mathbf{r}$ بردارِ مکان در چارچوبِ $\mathbf{S}$ و $\mathbf{r}'$ بردارِ مکان در چارچوبِ $\mathbf{S}'$ است. با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به زمان می‌رسیم به

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'. \tag{78}$$

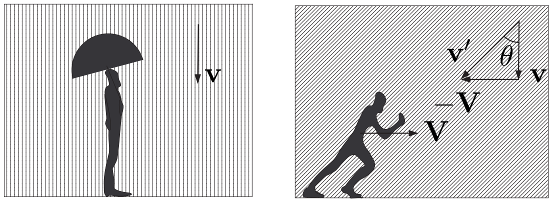
که $\mathbf{v} := \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$ سرعتِ ذره نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}$، $\mathbf{v}' := \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}$ سرعتِ ذره نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}'$، و $\mathbf{V} := \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t}$ سرعتِ مبدأ ِچارچوبِ $\mathbf{S}'$ نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}$ است. پس سرعتِ ذره نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}$، برابر است با سرعتِ ذره نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}'$، به‌علاوه‌ی سرعتِ مبدأ ِچارچوبِ $\mathbf{S}'$ نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}$ است. وقتی که ما در واگنِ قطار قدم می‌زنیم سرعتِ ما نسبت به قطار همان سرعتِ قدم‌زدنِ ما است اما سرعتِ ما نسبت به زمین می‌تواند خیلی بزرگ‌تر باشد. اگر از (78) نسبت به زمان مشتق بگیریم به رابطه‌ای بینِ $\mathbf{a}$ شتابِ ذره نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}$، $\mathbf{a}'$ شتابِ ذره نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}'$، و $\mathbf{A}$ شتابِ چارچوبِ $\mathbf{S}'$ نسبت به چارچوبِ $\mathbf{S}$ می رسیم



شکل ۲—۴۵:   حرکتِ پرتابی از دیدِ دو ناظرِ مختلف.

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}'. \qquad (79)$$

فرض کنید در قطاری که با سرعتِ ثابتِ V رویِ خطی راست حرکت می‌کند نشسته‌ایم. سرعتِ ما نسبت به قطار $v' = 0$، اما نسبت به چارچوبِ زمین $v = V$ است. اگر از یک واگنِ قطار به واگنِ دیگر برویم جابه‌جاییِ ما نسبت به قطار چند متر است اما نسبت به زمین ممکن است چند کیلومتر جابه‌جا شده باشیم. توپی را با سرعتِ v_0' به سمتِ بالا پرتاب می‌کنیم. از نظر ما که در قطار هستیم (ناظرِ درونِ قطار) توپ در راستایِ قائم بالا می‌رود و در همین راستا پایین می‌آید. اگر بخواهیم حرکت توپ از نظر ناظرِ رویِ زمین را در نظر بگیریم باید توجه داشته باشیم که در چارچوبِ زمین توپ علاوه بر سرعتِ قائمِ v_0'، یک سرعتِ اولیه‌یِ افقی‌یِ V هم دارد. چون شتابِ قطار نسبت به زمین صفر است، $A = 0$، شتابِ ذره در هر دو چارچوب یکی و برابر با g است. بنا بر این حرکتِ ذره در چارچوبِ زمین یک حرکت پرتابی است. شکلِ (۲—۴۵) را ببینید.



شکل ۲—۴۶: مردی زیرِ باران ایستاده. مردِ دیگری زیرِ باران می‌دود.

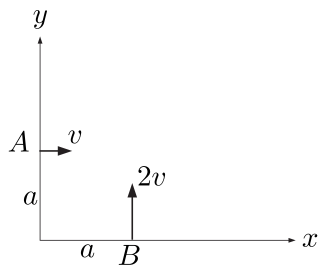
قطراتِ باران اگر بادِ شدیدی نوزد تقریباً عمودی می‌بارند. اگر ما زیرِ باران به‌ایستیم سرِمان خیس می‌شود. سرعتِ باران نسبت به زمین و ما یکی و برابر است با $\mathbf{v} = -v\mathbf{j}$. اگر زیرِ باران بدویم باران به صورت و جلویِ لباسِ مان هم می‌خورد. سرعتِ دویدن را $\mathbf{V}$ بگیرید. سرعتِ باران نسبت به ما $\mathbf{v}'$ به‌علاوه‌یِ سرعتِ دویدنِ ما نسبت به زمین $\mathbf{V}$، برابر است با سرعتِ باران نسبت به زمین $\mathbf{v}$. پس

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \tag{80}$$

شکلِ (۲—۴۶) را ببینید. هر چه ما سریع‌تر بدویم باران با سرعتِ بیش‌تری به صورت و جلویِ لباسِ‌مان می‌خورد. با استفاده از همین مطلب ما می‌توانیم سرعتِ باریدنِ باران را تخمین بزنیم. فرض کنید درونِ خودرویی نشسته‌اید و خودرو با سرعتِ $72\ \mathrm{Km/h}$ حرکت می‌کند. با اندازه‌گیری‌یِ انحرافِ باران از جهتِ قائم می‌توانیم سرعتِ باریدنِ باران را تخمین بزنیم. فرض کنید از نظرِ ناظرِ درونِ خودرو باران با زاویه‌یِ $\theta \approx 70^\circ$ نسبت به قائم ببارد. در این صورت

$$V = 72\ \frac{\mathrm{Km}}{\mathrm{h}} = 72\ \frac{\mathrm{Km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{1000\mathrm{m}}{1\mathrm{Km}} \cdot \frac{1\mathrm{h}}{3600\mathrm{s}} = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{81}$$

و



شکل ۲—۴۷: شکل مربوط به مثالِ 12.

$$v = 20 \cot\theta \ (\mathrm{m/s}) \approx 7.3 \ (\mathrm{m/s}). \quad (82)$$

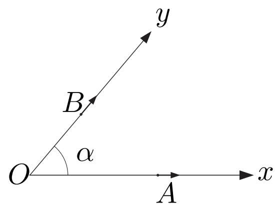
سرعتِ باریدنِ باران از همین مرتبه است.

مثالِ12) مطابقِ شکلِ (۲—۴۷)، دو ذره با سرعت‌هایِ اولیه‌یِ v و $2v$ حرکت می‌کنند و به ترتیب از نقاطِ A و B رد می‌شوند. چه‌وقت دو ذره به کم‌ترین فاصله می‌رسند؟ کم‌ترین فاصله‌یِ دو ذره چه‌قدر است؟

بردارِ مکانِ دو ذره و بردارِ مکانِ نسبی‌یِ آن‌ها عبارت است از

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}\ vt + \mathbf{j}\ a,$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}\ a + \mathbf{j}\ 2vt,$$
$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{i}\ (a - vt) + \mathbf{j}\ (2vt - a).$$

از نظرِ ناظرِ $x-y$ دو ذره رویِ دو خطِ راستِ عمود بر هم حرکت می‌کنند. اگر چارچوبی را در نظر بگیریم که محورهایش موازی‌یِ محورهایِ $x-y$ و مبدأ اَش یکی از این دو ذره باشد، این ذره ساکن و ذره‌یِ دیگر رویِ خطی راست حرکت می‌کند. برایِ به دست آوردنِ کم‌ترین فاصله‌یِ دو ذره کافی است $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ را به دست آوریم و آن را نسبت به زمان کمینه کنیم.



شکل ۲—۴۸:   شکل مربوط به مثالِ 13.

$$|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2=2a^2-6avt+5v^2t^2. \tag{83}$$

این فاصله در زمانِ $T=\dfrac{3a}{5v}$ کمینه می‌شود. در این زمان فاصله‌یِ دو ذره $a/\sqrt{5}$ است.

مثالِ13) مطابقِ شکلِ (۲—۴۸)، نقطه‌ی A روی نیم‌خط Ox و نقطه‌ی B روی نیم‌خط Oy است. زاویه‌ی Ox با Oy برابر α است. در لحظه‌ی $t=0$ فاصله‌ی A از O برابر a و فاصله‌ی B از O برابر b است. در این لحظه نقطه‌ی A با سرعت v_A روی محور x، و نقطه‌ی B با سرعت v_B روی محور y حرکت می‌کند. قرارداد این است که سرعت‌ها مثبت اند اگر حرکت در جهت مثبت محور باشد. v_B چه قدر باشد تا در $t=0$ مشتق زمانیِ فاصله‌ی A از B صفر باشد؟ بردارهایِ یکه در راستایِ Ox و Oy را به ترتیب $\mathbf{u}$ و $\mathbf{w}$ بگیرید. این دو بردارِ یکه بر هم عمود نیستند و زاویه‌یِ بینِشان α است. پس $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=\cos\alpha$. دو ذره از نقاطِ a و b رویِ محورهایِ Ox و Oy با سرعت‌هایِ v_A، و v_B حرکت می‌کنند. بردارِ مکانِ دو ذره عبارت است از

$$\mathbf{r}_1=r_1\mathbf{u},$$
$$\mathbf{r}_2=r_2\mathbf{v}. \tag{84}$$

بردارِ سرعتِ نسبی‌یِ دو ذره عبارت است از

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = v_A \mathbf{u} - v_B \mathbf{w}. \tag{85}$$

این بردار را می‌توانیم به دو مؤلفه‌یِ در راستایِ $\mathbf{r}$ و عمود بر آن تجزیه کنیم. می‌خواهیم مشتق فاصله‌ی A از B، یعنی $\dot{r}$ صفر باشد. با استفاده از $\dot{r}=0$ نتیجه می‌شود

$$\dot{r} r|_{t=0} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}|_{t=0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}|_{t=0} = 0. \tag{86}$$

پس

$$[v_A \mathbf{u} - v_B \mathbf{w}] \cdot [a \mathbf{u} - b \mathbf{w}] = 0, \tag{87}$$

که با استفاده از $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \cos\alpha$ نتیجه می‌شود

$$v_B = v_A \frac{b\,\cos\alpha - a}{b - a\,\cos\alpha} \tag{88}$$

مثالِ14) از نقطه‌یِ O بر بالایِ بُرجی تعدادِ زیادی ذره هم‌زمان و با سرعتِ اولیه‌یِ یک‌سان ولی با زوایایِ مختلف نسبت به اُفق، پرتاب می‌شوند. مبداء مختصات را نقطه‌یِ O بگیرید. از این مجموعه‌یِ ذرات در زمانِ t عکس می‌گیریم. خمی که ذرات در این زمان تشکیل می‌دهند چیست؟ مسئله را دوبعدی می‌گیریم.

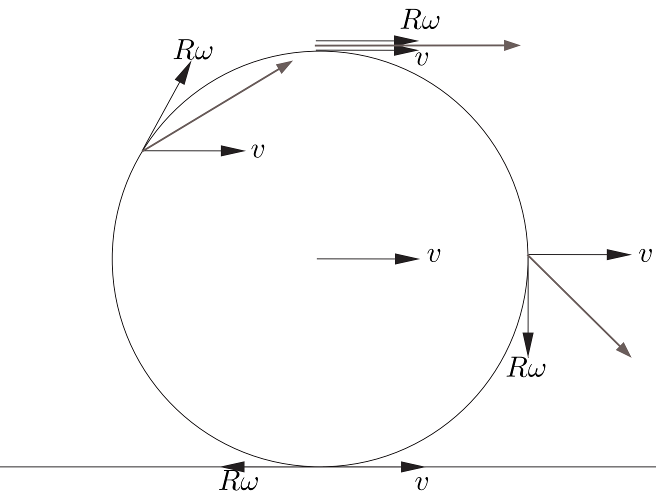
زاویه‌یِ پرتابِ یکی از ذرات را θ بگیرید. با حذفِ زاویه‌یِ θ رابطه‌ای بینِ x و y، مؤلفه‌هایِ مکانِ ذره در زمانِ t، به دست می‌آید. گرچه زاویه‌یِ پرتابِ ذرات فرق دارد، این رابطه برایِ همه‌یِ ذرات یک‌سان است. این رابطه مکانِ هندسیِ ذرات در زمانِ t است. در واقع اگر از این مجموعه‌یِ ذرات در زمانِ t عکس بگیریم، خمی که ذرات در این زمان تشکیل می‌دهند با این رابطه داده می‌شود.

$$x = v_0 \cos\theta\ t,$$
$$y = v_0 \sin\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2,$$
$$x^2 + (y + \frac{1}{2}gt^2)^2 = v_0^2 t^2. \qquad (89)$$

معادله‌یِ $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2$، معادله‌یِ دایره‌ای به شعاعِ R است که مرکزش در مختصاتِ x_c و y_c است. پس خمی که در معادله‌یِ (89) به دست آوردیم، معادله‌یِ دایره‌ای به شعاعِ $R = v_0 t$ است که مرکزش در $x_c = 0$ و $y_c = -gt^2/2$ است. در واقع این خم دایره‌ای است که شعاعش به‌طورِ خطی زیاد می‌شود و مرکزش هم با شتابِ ثابتِ g سقوط می کند. اگر مسئله را سه‌بعدی بگیریم، مکانِ هندسی‌یِ ذرات سطحِ کره‌ای می‌شود که مرکزش با شتابِ ثابتِ g سقوط می کند و شعاعش هم به طورِ خطی با زمان زیاد می‌شود.

حالا بیایید مسئله را از دیدِ چارچوبی که مبدأ اَش در ابتدا بر O منطبق بوده و با شتابِ گرانش در حالِ سقوط است، بررسی کنیم. فکر می‌کنید مکانِ هندسیِ این ذرات در این چارچوب چه منحنی‌ای است؟ آن‌چه در این چارچوب مشاهده می‌شود این است که تعدادی ذره با سرعتِ v_0 و شعاعی به بیرون پرتاب می‌شوند. هم شتابِ ذرات و هم شتابِ چارچوب نسبت به زمین g است، پس شتابِ ذرات در این چارچوب صفر است، پس همه‌یِ ذرات شعاعی و رویِ خطی راست و با سرعتِ ثابت حرکت می‌کنند. پس مکانِ هندسی‌یِ ذرات دایره‌ای است که شعاعش به طورِ خطی با زمان زیاد می‌شود. اگر مسئله را سه‌بعدی بگیریم، مکانِ هندسی‌یِ ذرات کره‌ای می‌شود که شعاعش به طورِ خطی با زمان زیاد می‌شود.

مثالِ15) دیسکی به شعاعِ R با سرعتِ ثابتِ v رویِ زمینی افقی می‌غلتد. نقطه‌ای رویِ محیطِ حلقه را علامت زده‌ایم. از حرکتِ این علامت چه خمی ساخته می‌شود؟

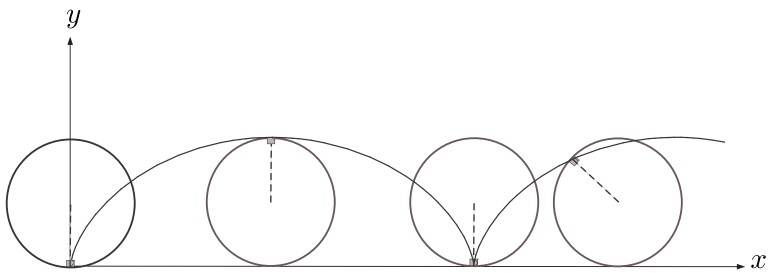


شکل ۲—۴۹:   شکل مربوط به مثالِ 15.

در چارچوبی که به مرکزِ دیسک چسبیده و هم‌راهِ آن با سرعتِ ثابت حرکت می‌کند، حرکتِ علامت یک دایره است. برایِ این‌که معادله‌یِ خمی که علامت در چارچوبِ زمین می‌سازد را به دست آوریم باید ببینیم منظور از غلتش چیست و تعریفی دقیق از آن داشته باشیم. وقتی می‌گوییم جسمی رویِ سطحی می‌غلتد سرعتِ نسبی‌ی نقطه‌یِ تماسِ جسم و سطح صفر است. وجودِ این قید منجر به رابطه‌ای بینِ سرعتِ انتقالی‌یِ مرکزِ دیسک و سرعتِ زاویه‌ای‌یِ آن می‌شود.

$$v = R\omega. \tag{90}$$

همان‌طور که در شکلِ (۲—۴۹) هم می‌بینید هر نقطه یک حرکتِ انتقالی با سرعتِ ثابتِ v دارد و یک حرکتِ دورانی حولِ مرکزِ دیسک. در چارچوبی که هم‌راهِ دیسک حرکتِ انتقالی دارد و مبدأَش نقطه‌یِ تماسِ دیسک با زمین است، مکانِ علامت با معادله‌یِ



شکل ۲—۵۰: شکل مربوط به مثالِ 15. علامت رویِ محیطِ حلقه است.

$$
\begin{aligned}
x' &= -R\sin(\omega t),\\
y' &= R\left(1-\cos(\omega t)\right). \qquad (91)
\end{aligned}
$$

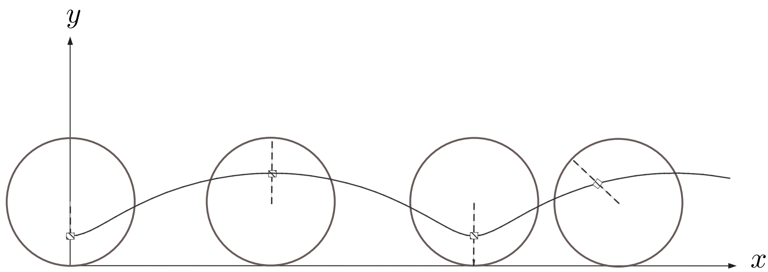
داده می‌شود. در این‌جا فرض کرده‌ایم که در زمانِ $t=0$، مکانِ علامت رویِ محورِ y' و در تماسِ با زمین بوده. علاوه بر این فرض می‌کنیم که در $t=0$ دو چارچوبِ xy و $x'y'$ برهم منطبق بوده‌اند. برایِ به دست آوردنِ مکانِ علامت در چارچوبِ زمین کافی است که انتقالِ چارچوبِ $x'y'$ با سرعتِ v در جهتِ محورِ x را در نظر بگیریم.

$$
\begin{aligned}
x &= x'+vt = -R\sin(\omega t)+vt,\\
y &= y' = R\left(1-\cos(\omega t)\right). \qquad (92)
\end{aligned}
$$

خمی که علامت می‌سازد به همراهِ مکانِ دیسک در چند زمانِ مختلف را در شکلِ (۲—۵۰) می‌بینید. به این شکل سیکلوییدِ[5] یا چرخ‌زاد می‌گویند. سرعت و شتابِ علامت عبارت‌اند از

---

[5] cycloid



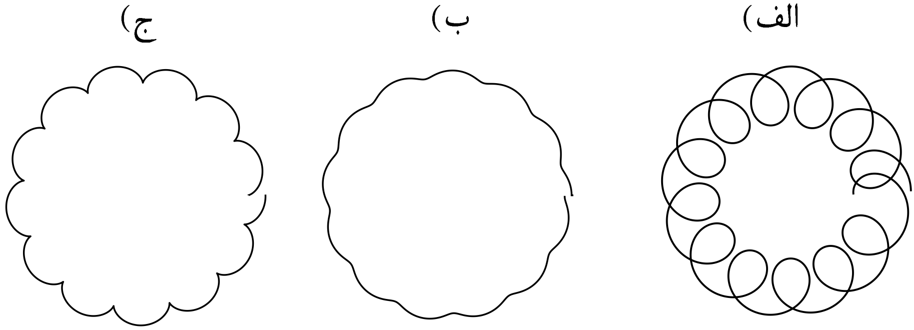
شکل ۲—۵۱: شکلِ مربوط به مثالِ 15. علامت در نقطه‌ای رویِ سطحِ دیسک است.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (-R\omega\cos\omega t + v)\ \mathbf{i} + R\omega\sin\omega t\ \mathbf{j},\\ &= v(-\cos(\frac{vt}{R}) + 1)\ \mathbf{i} + v\sin(\frac{vt}{R})\ \mathbf{j}\\ \mathbf{a} &= R\omega^2\sin\omega t\ \mathbf{i} + R\omega^2\cos\omega t\ \mathbf{j}\\ &= \frac{v^2}{R}\left(\sin(\frac{vt}{R})\ \mathbf{i} + \cos(\frac{vt}{R})\ \mathbf{j}\right).\end{aligned} \tag{93}$$

اگر به جایِ آن‌که رویِ محیطِ دیسک علامت بگذاریم، در نقطه‌ای رویِ سطحِ دیسک علامت بزنیم، خمی که مکانِ علامت در زمان‌هایِ مختلف می‌سازد به صورتِ شکلِ (۲—۵۱) می‌شود. حالا فرض کنید دیسک کاملاً نمی‌غلتد و در حین حرکت رویِ زمین لیز هم می‌خورد. اگر بیش‌تر از آن‌که بچرخد، جلو برود یعنی $v > R\omega$، از حرکتِ علامتِ رویِ محیطِ دیسک در فضا چه خمی ساخته می‌شود؟ اگر دیسک بیش‌تر بچرخد تا آن‌که جلو برود[6] یعنی $v < R\omega$ از حرکتِ علامت چه خمی ساخته می‌شود؟

مثالِ16) فاصله‌ی زمین از خورشید $r_1 = 1.5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$ و فاصله‌ی ماه از زمین $r_2 = 3.8 \times 10^8\ \mathrm{m}$ است. زمین هر 365 روز، (T_1)، یک بار روی دایره‌ای به دور

[6] مثلِ حالتی که برایِ چرخِ ماشینی که راننده‌اش سعی میکند آن را رویِ سطحِ لیز ویخ‌زده جلو ببرد اتفاق می‌افتد



شکل ۲—۵۲: شکلِ مربوط به مثالِ 16.

خورشید، و ماه هر 27 روز، (T_2)، یک بار روی دایره‌ای به دور زمین می‌گردد. فرض کنید این دو دایره هم‌صفحه باشند. مدار ماه به دور خورشید شبیه کدام مسیر در شکلِ (۲—۵۲) است؟ معادله‌ی مدارِ ماه را به دست آورید. سرعتِ زمین نسبت به خورشید $v_1 = 2\pi r_1/T_1 \approx 3 \times 10^4$ m/s و سرعتِ ماه نسبت به زمین $v_2 = 2\pi r_2/T_2 \approx 1 \times 10^3$ m/s است. در گزینه‌یِ الف) زمان‌هایی وجود دارد که سرعتِ ماه در جهتِ عکس سرعتِ انتقالی‌یِ زمین است. در گزینه‌یِ ج) زمان‌هایی وجود دارد که سرعتِ ماه صفر می‌شود. اما $v_1 \gg v_2$، و در نتیجه امکان ندارد که سرعتِ ماه نسبت به خورشید صفر یا منفی شود. پس جوابِ درست گزینه‌یِ (ب) است. حالا بیایید معادله‌یِ مدارِ ماه را به دقت به دست آوریم. بردارِ مکانِ زمین نسبت به خورشید $\mathbf{r}_1$، بردارِ مکانِ ماه نسبت به زمین $\mathbf{r}_2$، و بردارِ مکانِ ماه نسبت به خورشید $\mathbf{r}_3$ عبارت‌اند از

$$\mathbf{r}_1 = r_1 \cos\omega_1 t\ \mathbf{i} + r_1 \sin\omega_1 t\ \mathbf{j},$$
$$\mathbf{r}_2 = r_2 \cos\omega_2 t\ \mathbf{i} + r_2 \sin\omega_2 t\ \mathbf{j},$$
$$\mathbf{r}_3 = (r_1 \cos\omega_1 t + r_2 \cos\omega_2 t)\ \mathbf{i} + (r_1 \sin\omega_1 t + r_2 \sin\omega_2 t)\ \mathbf{j}. \quad (94)$$

که $\omega_1 := 2\pi/T_1$، و $\omega_2 := 2\pi/T_2$. بردارِ سرعت وشتابِ ماه نسبت به خورشید عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 &= -(r_1\omega_1 \sin\omega_1 t + r_2\omega_2 \sin\omega_2 t)\,\mathbf{i}\\ &\quad +(r_1\omega_1 \cos\omega_1 t + r_2\omega_2 \cos\omega_2 t)\,\mathbf{j},\\ \mathbf{a}_3 &= -(r_1\omega_1^2 \cos\omega_1 t + r_2\omega_2^2 \cos\omega_2 t)\,\mathbf{i}\\ &\quad -(r_1\omega_1^2 \sin\omega_1 t + r_2\omega_2^2 \sin\omega_2 t)\,\mathbf{j}.\end{aligned} \tag{95}$$

اندازه‌یِ سرعتِ ماه برابر است با

$$|v_3| = \sqrt{r_1^2\omega_1^2 + r_2^2\omega_2^2 + 2r_1r_2\omega_1\omega_2\cos(\omega_2-\omega_1)t}. \tag{96}$$

بیش‌ترین مقدارِ v_3 وقتی است که $r_1\omega_1$ و $r_2\omega_2$ هم‌جهت‌اند. در این زمان $v_3 = r_1\omega_1 + r_2\omega_2$ و کم‌ترین مقدار وقتی است که جهتِ این دو عکسِ هم است، یعنی $v_3 = r_1\omega_1 - r_2\omega_2$.

۴—۲ رگه

بیش‌ترِ مواردی که تا کنون بحث کردیم راجع به بردارِ مکان و یا مسیرِ یک ذره بود. بیایید حالتی را در نظر بگیریم که با تعدادی زیادی ذره سر و کار داریم. گاهی اوقات مکانِ تک‌تکِ این ذرات موردِ سئوال نیست بل‌که سئوال در موردِ خمی است که در هر لحظه همه‌یِ ذرات رویِ آن هستند. فرض کنید در هر واحدِ زمانی یک ذره (مثلاً خاک‌اره) در نقطه‌یِ معینی از جویِ آب بریزیم. هر کدام از این ذره‌ها در مسیری حرکت می‌کنند که لزوماً یک‌سان نیست. اگر پس از مدتی به این مجموعه نگاه کنیم

ذرات خمی ساخته‌اند. به این خم رگه[7] می‌گویند. دودی که از دودکشی باریک بیرون می‌آید یک رگه است. اگر نوک خودنویسی را درونِ آبی که جاری است قرار دهیم جوهری که از آن خارج می‌شود خمی می‌سازد. این خم یک رگه است. هواپیمایی که با سرعتِ ثابت در حالِ پرواز است را در نظر بگیرید. فرض کنید خلبان این هواپیما بخواهد ناحیه‌ای را بمباران کند. برایِ این‌کار بمب‌ها را پشتِ سرِ هم از هواپیما رها می‌کند. بمب‌هایی که در آسمان هستند یک خم می‌سازند. اگر مقاومتِ هوا نبود این خم یک خطِ راست بود. چرا؟

مثالِ17) آب از آب‌پاشی مطابقِ شکلِ (۲—۵۳) با سرعتِ v_0 در جهتِ مثبتِ y خارج می‌شود. آب‌پاش را با سرعتِ $u_0 \sin \omega t$ در جهتِ x نسبت به دستگاهِ xy حرکت می‌دهیم. در زمانِ $t = 0$ وسطِ آب‌پاش در مبدأ مختصات بوده است.

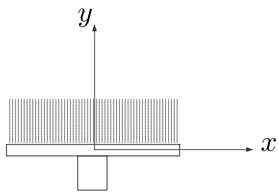
الف— قطره‌یِ آبی در زمانِ $t = T$ در نقطه‌یِ $A(x = a, y = b)$ قرار دارد. این قطره از چه نقطه‌ای از آب‌پاش خارج شده و در چه مسیری به A رسیده است؟ از گرانش چشم بپوشید.

ب— در مبدأ مختصات اسفنجِ کوچکی آغشته به رنگ ساکن است، به طوری که قطره‌هایِ آبی که از مبدأ پرتاب می‌شوند رنگی می‌شوند. در لحظه‌یِ T از این مجموعه عکس می‌گیریم. نقاطِ رنگی منحنی‌ای به شکلِ $f(x, y) = 0$ می‌سازند. معادله‌یِ خمِ $f(x, y)$ که یک رگه است، چیست؟

الف— بدیهی است چون از گرانش صرفِ نظر شده‌است هیچ نیرویی به قطره وارد نمی‌شود و مسیر قطره خط راست است. فرض می‌کنیم قطره‌یِ آب در زمانِ t_0 از آب‌پاش خارج شده‌است. چون مؤلفه‌یِ yِ سرعتِ قطره v_0 است و $y(T) = b$ است پس

$$y = v_0(t - t_0) \quad \Rightarrow t_0 = T - \frac{b}{v_0}. \tag{97}$$

[7] streak line



شکل ۲—۵۳: شکل مربوط به مثالِ 17.

اما مؤلفه‌یِ xِسرعتِ قطره، همان سرعتِ آب‌پاش در زمانِ t_0 است، پس $u_x = u_0 \sin(\omega t_0)$ است و در نتیجه

$$x = x_0 + u_0(t - t_0)\sin(\omega t_0). \tag{98}$$

با استفاده از $x(t = T) = a$ و جای‌گذاری مقدارِ t_0، x_0 به دست می‌آید.

$$x_0 = a - \frac{u_0 b}{v_0}\sin[\omega(T - b/v_0)]. \tag{99}$$

x_0 مکانِ جدا شدنِ قطره از آب‌پاش در چارچوبِ ساکن است. در چارچوبِ ساکن، آب‌پاش در زمانِ t_0 در مکانِ x_0' است.

$$x_0' = \int_0^{t_0} u_0 \sin\omega t = \frac{u_0}{\omega}\left(1 - \cos(\omega t_0)\right) \tag{100}$$

بنا بر این مکانِ جدا شدنِ قطره از آب‌پاش در چارچوبِ آب‌پاش عبارت است از

$$x_0 - x_0' = a - \frac{u_0 b}{v_0}\sin[\omega(T - b/v_0)] - \frac{u_0}{\omega}\left(1 - \cos(\omega T - \frac{\omega b}{v_0})\right), \tag{101}$$

ب– اگر قطره‌یِ رنگی در زمانِ t_1 از آب‌پاش جدا شده باشد، مکان آن در زمانِ T عبارت است از

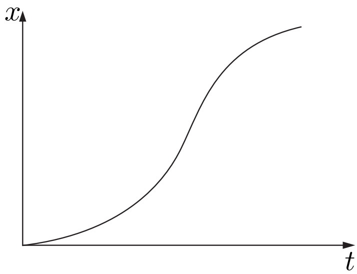
$$x = u_0(T - t_1)\sin\omega t_1, \qquad y = v_0(T - t_1)$$

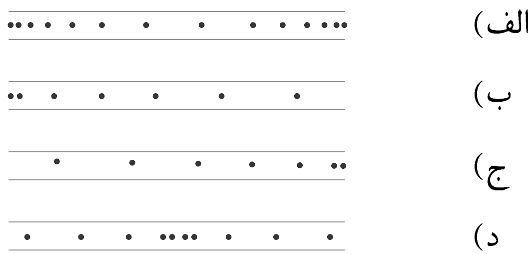
قطره‌های رنگیِ در زمان‌هایِ t_1ِ متفاوت از آب‌پاش جدا شده‌اَند، پس کافی است t_1 را در معادله‌یِ بالا حذف کنیم. در این صورت

$$f(x, y) = x - \frac{u_0 y}{v_0}\sin[\omega(T - y/v_0)] = 0$$

۲–۵ مسائل

مسئله‌یِ1) شکلِ زیر منحنی‌یِ مکان–زمانِ حرکتِ ذره‌ای رویِ خطّی راست است. در واحدِ زمان از ذره عکس گرفته شده. کدام‌یک از گزینه‌ها می‌تواند مکانِ ذره در لحظه‌هایِ مختلف را نشان دهد.



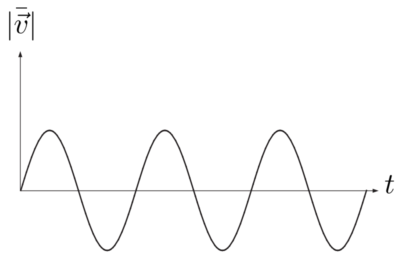


مسئله‌یِ2) خودروی شماره‌ی ۱ در $t=0$ از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و تا زمان $t=t_1$ شتابش مقدار ثابت a_1 است. پس از $t=t_1$ شتابش مقدار ثابت a_2 می‌شود. خودروی شماره‌ی ۲ در $t=0$ از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و شتابش مقدار ثابت a است، طوری که $0<a_1<a<a_2$. در $t=T$ سرعت لحظه‌ای دو خودرو برابر است. سرعت متوسط خودروی ۱ از $t=0$ تا $t=T$ را $\bar{v}_1$ و سرعت متوسط خودروی 2 از $t=0$ تا $t=T$ را $\bar{v}_2$ می‌نامیم. $\bar{v}_1$ بزرگ‌تر است یا $\bar{v}_2$؟

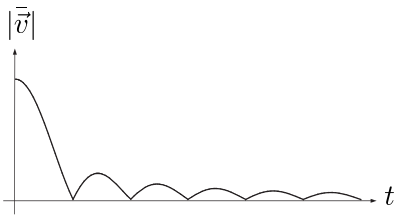
مسئله‌یِ3) جسمی با سرعت ثابت v روی دایره‌ای در حرکت است. سرعت متوسط ذره از $t=0$ تا زمان $t=T$ را $\bar{\vec{v}}(T)$ می‌نامیم.

الف) $\bar{\vec{v}}(T)$ را به دست آورید.

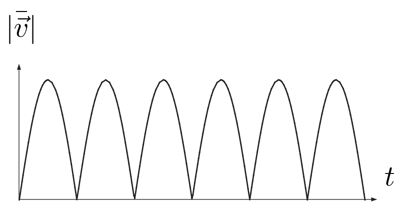
ب) نمودارِ $|\bar{\vec{v}}(T)|$ بر حسبِ T کدام‌یک از گزینه‌هایِ زیر است؟



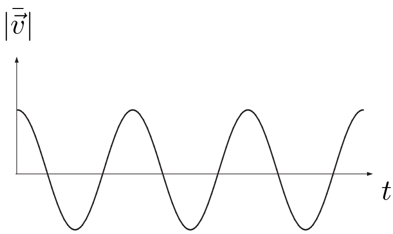
الف)



ب)

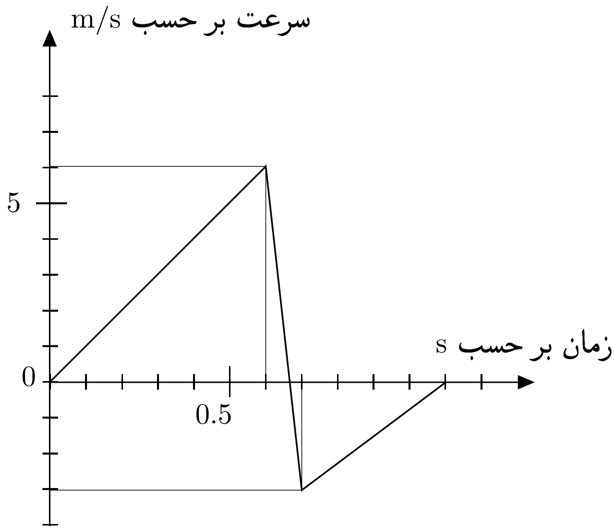


ج)



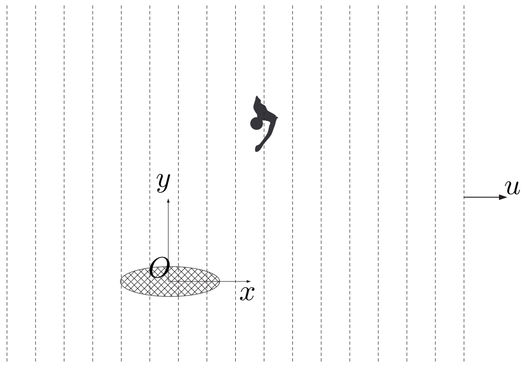
د)

مسئله‌یِ4) یک توپ کوچک نرم به جرم $۰/۲$ kg از ارتفاع h رها می‌شود و پس از برخورد با یک سطح افقی، به طرف بالا برمی‌گردد. قسمتی از نمودار سرعت ـ زمان آن در شکل نشان داده شده است. شتابِ متوسطِ توپ هنگام برخورد با سطح افقی چه‌قدر



است؟

مسئله‌یِ5) شناگری می‌خواهد با شناکردن از کناره‌یِ رودخانه‌ای به قایقی که در نقطه‌یِ O ثابت نگه‌داشته‌شده برود. مبدأِ مختصات را نقطه‌یِ O و مختصاتِ کناره‌یِ رودخانه را (x_0, y_0) بگیرید. سرعتِ شناکردنِ او در آبِ ساکن u و جهتِ شناکردنِ او هم‌واره به سمتِ نقطه‌یِ O است. اگر آبِ رودخانه ساکن بود او در خطی راست به سمتِ O می‌رفت. اما آبِ رودخانه ساکن نیست و با سرعتِ u در جهتِ ثابتِ $\mathbf{i}$ حرکت می‌کند. r و θ مختصاتِ قطبی‌یِ شناگر نسبت به چارچوبِ xy هستند.



الف) v_x، و v_y مؤلفه‌یِ x و yِ سرعتِ شناگر را نسبت به چارچوبِ xy بر حسبِ u و θ به دست آورید.

ب) v_r، و v_θ مؤلفه‌هایِ r و θ یِ سرعتِ شناگر را نسبت به چارچوبِ xy بر حسبِ u و θ به دست آورید.

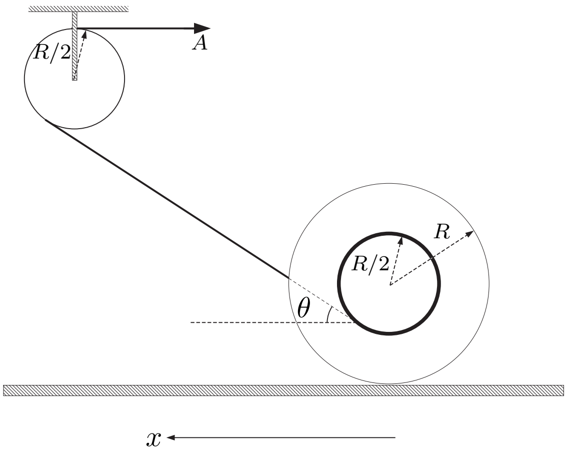
ج) $r(\theta)$ مسیرِ شناگر را به دست آورید.

مسئله‌یِ6) نخِ بلندی به دورِ قرقره‌ای به شعاعِ خارجی‌یِ R، و شعاعِ داخلی‌یِ $R/2$ پیچیده شده است. مطابقِ شکل سرِ دیگرِ این نخ پس از گذشتن از قرقره‌یِ ثابتی به شعاعِ $R/2$ با شتابِ ثابتِ A کشیده می‌شود. فرض کنید که قرقره می‌غلتد.

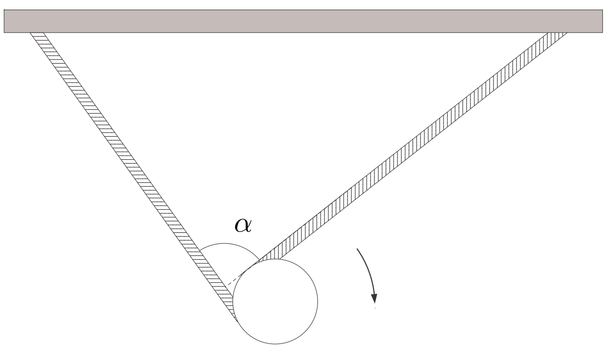
الف) قرقره به کدام سمت می‌غلتد؟

ب) نشان دهید بینِ شتابِ حرکتِ انتقالی‌یِ قرقره، a، زاویه‌یِ θ، طولِ نخِ بینِ دو قرقره، l، و شتابِ A رابطه‌یِ زیر برقرار است.

$$A = a(\cos\theta - \frac{1}{2}) - \frac{(v\sin\theta)^2}{l}.$$



مسئله‌یِ7) مطابقِ شکل دو نخ به دورِ دیسکِ سنگینی به شعاعِ R پیچیده شده‌اند. نخ‌ها کش نمی‌آیند و طرفِ دیگرشان به دیوار وصل شده‌اند. شعاعِ دیسک خیلی کوچک‌تر از طولِ نخ‌ها است. زمانی‌که سرعتِ زاویه‌ایِ دیسک ω و زاویه‌یِ بینِ نخ‌ها α است، سرعتِ دیسک چه‌قدر است؟



مسئله‌یِ8) دو ذره با سرعت‌هایِ ثابتِ $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ در حرکت‌اند. این ذرات در زمانِ $t = 0$ از نقاطِ $\mathbf{r}_{01}$ و $\mathbf{r}_{02}$ رد شده‌اند.

الف) به چه شرطی این ذرات برخورد می‌کنند؟

ب) فرض کنید این شرط برقرار نیست. در چه زمانی فاصله‌یِ ذرات کم‌ترین مقدار می‌شود؟ کم‌ترین فاصله چه‌قدر است؟

مسئله‌یِ9) ذره‌ای با سرعتِ زاویه‌ای‌یِ ثابتِ ω رویِ دایره‌ای به شعاعِ R حرکت می‌کند.

الف) بردارِ سرعتِ متوسطِ ذره در یک دور چه‌قدر است؟ بردارِ شتابِ متوسطِ ذره در یک دور چه‌قدر است؟

ب) بردارِ سرعتِ متوسطِ ذره در نیم دور چه‌قدر است؟ بردارِ شتابِ متوسطِ ذره در نیم دور چه‌قدر است؟

مسئله‌یِ10) ذره‌ای در مسیری با معادله‌یِ

$$x = R\cos\omega t - R,$$
$$y = R\sin\omega t. \qquad (102)$$

حرکت می‌کند.

الف) جابه‌جایی‌یِ ذره از زمانِ $t = 0$ تا $t = 2\pi/\omega$ چه‌قدر است؟

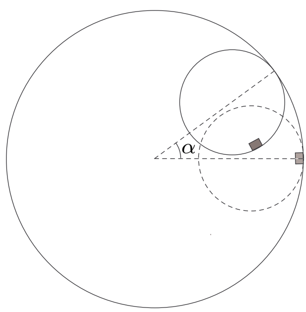
ب) مسافتی که ذره در این مدت طی کرده چه‌قدر است؟

مسئله‌یِ11) استوانه‌ای به شعاعِ a و استوانه‌ای توخالی به شعاعِ b در نظر بگیرید.

الف) استوانه‌ی به شعاعِ a درونِ استوانه‌ای به شعاعِ b می‌غلتد. محورِ استوانه‌ها هم‌واره موازی است. علامتی رویِ استوانه‌یِ متحرک قرار دارد. مکانِ این علامت با گذشتِ زمان خمی می‌سازد. این خم هیپوسیکلویید[8] نامیده می‌شود. نشان دهید معادله‌یِ این خم عبارت است از

$$
\begin{aligned}
x &= (b-a)\cos\theta + a\cos\left(\frac{(b-a)\theta}{a}\right)\\
y &= (b-a)\sin\theta - a\sin\left(\frac{(b-a)\theta}{a}\right).
\end{aligned} \tag{103}
$$

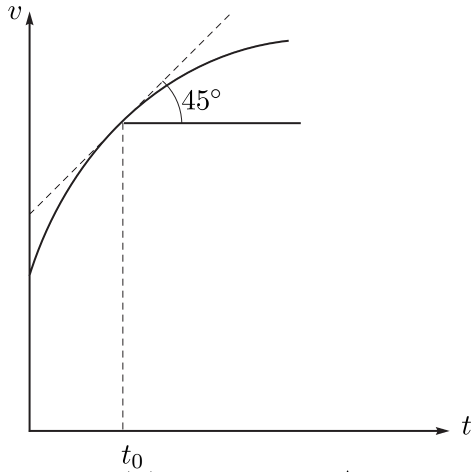
ب) اگر استوانه‌یِ به شعاعِ a بیرونِ استوانه‌یِ به شعاعِ b بغلتد، معادله‌یِ خمی که این علامت با گذشتِ زمانِ می‌سازد چیست؟ محورِ استوانه‌ها هم‌واره موازی می‌ماند.



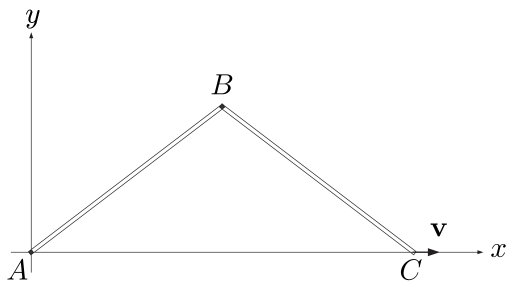
مسئله‌یِ12) نمودار سرعت ـ زمان برای متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند رسم شده است. هر $1\,\mathrm{cm}$ روی محور v را معادل $10\,\mathrm{m/s}$، و هر $1\,\mathrm{cm}$ روی

[8] hypocycloid

محور t را معادل $1\,\mathrm{s}$ گرفته ایم. شتاب متحرک در لحظه‌ی $t = t_0$ چه قدر است؟



مسئله‌یِ13) میله‌یِ AB در نقطه‌یِ A به زمین لولا شده و دو میله‌یِ AB و BC در نقطه‌یِ B به هم لولا شده‌اند. طولِ هردو میله ℓ است. نقطه‌یِ C از میله‌یِ BC را با سرعتِ $\mathbf{v}$ در راستایِ محورِ x می‌کشیم. بردارِ سرعتِ نقطه‌یِ B چیست؟



مسئله‌یِ14) فردی می‌خواهد با قایق از یک طرفِ رودخانه‌ای به عرضِ $d = 50\ \mathrm{m}$ به طرفِ دیگرِ آن برود. سرعتِ پاروزدنِ او نسبت به آبِ ساکن $v = 3\ \mathrm{m/s}$ است. او در چه جهتی پارو بزند تا طولِ مسیرش به سمتِ دیگرِ رودخانه کوتاه‌ترین مقدار باشد. مسئله را برایِ دو حالتِ زیر حل کنید.

الف) سرعتِ آبِ رودخانه $u = 2$ m/s است.

ب) سرعتِ آبِ رودخانه $u = 4$ m/s است.

مسئله‌یِ15) ماده‌یِ منفجره‌ای وقتی منفجر می‌شود تکه‌هایِ آن به طورِ هم‌سان‌گرد و با سرعتِ اولیه‌یِ v_0 در همه‌یِ جهت‌ها پرتاب می‌شوند. سطحِ زمینِ را صفحه‌یِ xy بگیرید.

الف) این گلوله از نقطه‌ی رویِ محورِ z رها می‌شود و وقتی به نقطه‌یِ $(x = 0, y = 0, z = h)$ رسید منفجر می‌شود و تکه‌هایِ آن به اطراف پرتاب می‌شود. معادله‌یِ رویه‌ای که تکه‌های گلوله رویِ آن قرار دارند، در زمانِ T پس از انفجار چیست؟

ب) فرض کنید گلوله با سرعتِ اولیه‌یِ v_0 که با افق زاویه‌یِ θ_0 می‌سازد پرتاب می‌شود. وقتی گلوله به نقطه‌یِ اوج رسید، منفجر می‌شود و تکه‌هایِ آن به اطراف پرتاب می‌شود. معادله‌یِ رویه‌ای که تکه‌های گلوله رویِ آن قرار دارند، چیست؟

مسئله‌یِ16) هواپیمایی رویِ خطی مستقیم در ارتفاعِ h با شتابِ ثابتِ A پرواز می‌کند. این هواپیما شروع به رها کردنِ بمب‌هایش می‌کند. پس از گذشتِ زمانِ T، قبل از این که بمب ها به زمین برسند از این صحنه‌یِ بمباران عکس‌برداری می‌شود. فرض کنید اولین بمب از نقطه‌یِ $(x = 0, y = h)$ در زمانِ $t = 0$ رها شده است. خمی که بمب‌ها در زمانِ T، در فضا می‌سازند چیست؟

مسئله‌یِ17) ذره‌ای در مسیری با معادله‌یِ

$$x = R\cos\omega t - R,$$
$$y = R\sin\omega t. \tag{104}$$

حرکت می‌کند. مسافتی که ذره از زمانِ $t = 0$ تا $t = 3\pi/(2\omega)$ طی می‌کند، چه‌قدر است؟

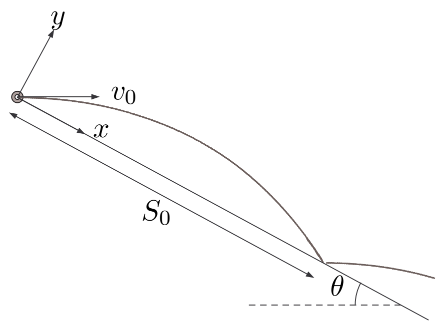
مسئله‌یِ18) سطحِ آینه‌ای با افق زاویه‌یِ ϑ می‌سازد. گلوله‌ای با سرعتِ اولیه‌یِ v_0 و با زاویه‌یِ φ نسبت به سطحِ آینه پرتاب می‌شود. در چه لحظه‌ای فاصله‌یِ گلوله با تصویرش در آینه، بیش‌ترین مقدار است؟

مسئله‌یِ19) معادله‌یِ مکان—زمانِ ذره‌ای رویِ مسیری دوبعدی

$$x(t) = A(2\omega t - \sin(\omega t)),$$
$$y(t) = A(1 - \cos(\omega t)). \tag{105}$$

است. بردارِ شتابِ ذره را به دست آورید. شتاب دو بخش دارد، یکی مربوط به تغییرِ اندازه‌یِ سرعت است، $\mathbf{a}_\parallel$، که موازی با سرعت است و دیگری عمود بر بردارِ سرعت، $\mathbf{a}_\perp$، که ناشی از تغییرِ جهتِ سرعت است. $\mathbf{a}_\parallel$ و $\mathbf{a}_\perp$ را به دست آورید.

مسئله‌یِ20) از رویِ سطحِ شیب‌داری با شیبِ θ توپی را با سرعتِ اولیه‌یِ افقی‌یِ v_0 پرتاب می‌کنیم.



الف) اولین جایی که گلوله به سطحِ شیب‌دار می‌خورد، S_1، کجاست؟

ب) فرض کنید برخوردِ گلوله با سطحِ شیب‌دار کش‌سان باشد، یعنی مولفه‌یِ مماسی‌یِ سرعتِ گلوله با سطحِ شیب‌دار عوض نمی‌شود و مولفه‌یِ عمودی‌یِ سرعتِ گلوله با سطحِ شیب‌دار برعکس می‌شود. دومین جایی که گلوله به سطحِ شیب‌دار می‌خورد، S_2، کجاست؟

ج) اگر v_0 دو برابر شود $\frac{S_2}{S_1}$ چه‌قدر می‌شود؟

مسئله‌یِ21) در شکلِ (۲–۲۴) منحنی‌یِ سرعت بر حسبِ سوخت بر واحدِ زمانِ یک خودرو آورده شده. با استفاده از آن نمودار منحنی‌یِ مصرفِ سوخت بر واحدِ زمان، I، بر حسبِ v را رسم کنید.

مسئله‌یِ22) منحنی‌یِ سرعت—مکانِ ذره‌ای یک بیضی با معادله‌یِ

$$\frac{v^2}{v_0^2}+\frac{x^2}{x_0^2}=1.$$

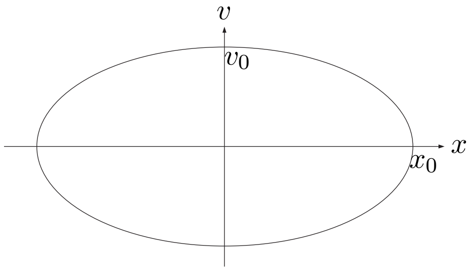
است[9].

[9] این نمودار، نمودارِ فضایِ فازِ یک دستگاهِ جرم و فنر است.

الف) در چه بخش‌هایی از این نمودار حرکت تندشونده و در چه بخش‌هایی حرکت کندشونده است؟

ب) در چه نقاطی شتاب صفر است؟ آیا جایی وجود دارد که ذره ساکن باشد؟

ج) شتابِ ذره را بر حسبِ مکانِ ذره، x، به دست آورید.

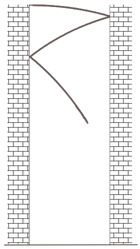


مسئله‌یِ23) اندازه‌یِ سرعتِ ذره‌ای، v، پس از طی‌کردنِ مسافتِ s، $v(s)$ است. نشان دهید

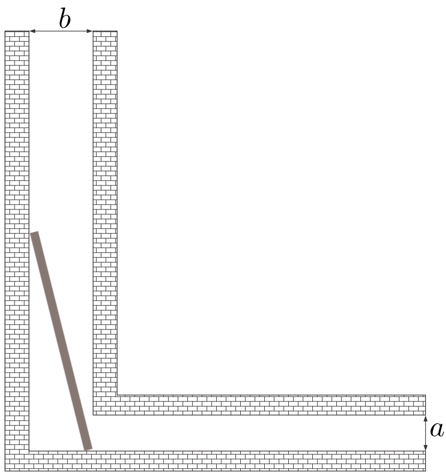
$$a_{\parallel} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s}, \qquad (106)$$

که $a_{\parallel}$ اندازه‌یِ شتابِ مماس بر مسیرِ ذره است.

مسئله‌یِ24) دو ساختمان به ارتفاعِ $h = 20\ \mathrm{m}$ در فاصله‌یِ $\ell = 2\ \mathrm{m}$ از هم هستند. توپی از بالای یکی از ساختمان ها با سرعتِ اولیه‌یِ اُفقی‌یِ $v_0 = 2\ \mathrm{ms}^{-1}$ پرتاب می‌شود. مطابقِ شکل این توپ حینِ پایین آمدن به‌طورِ مکرر به دیوارِ ساختمان‌ها برخورد می‌کند. فرض کنید برخوردِ توپ با دیوارها کش‌سان باشد. در برخوردِ کش‌سان مؤلفه‌یِ مماسی‌یِ سرعت ثابت می‌ماند و مؤلفه‌یِ عمودی‌یِ سرعت برعکس می‌شود. توپ قبل از برخورد با زمین چند برخورد با دیوارها دارد؟



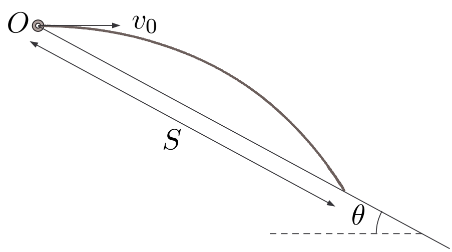
مسئله‌یِ25) میله‌ای به طولِ ℓ مطابقِ شکل یک سرش روی کف و سرِ دیگرش رویِ دیوار است. مسئله را دوبُعدی در نظر بگیرید و از ضخامتِ میله چشم‌پوشی کنید.

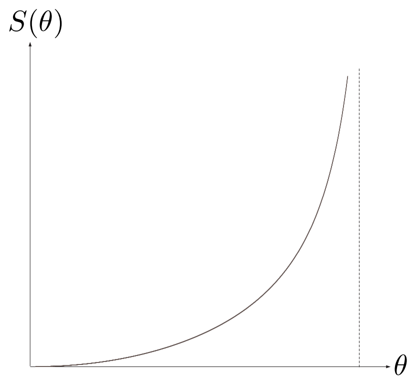


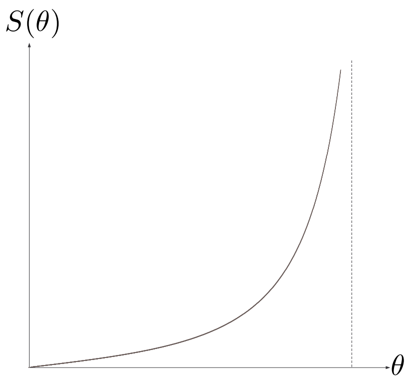
الف) سرِ میله که رویِ زمین است را با سرعتِ ثابتِ v_1 می‌کشیم. سرعتِ سرِ دیگرِ میله، v_2 چه‌قدر است؟ فرض کنید سرِ دیگر میله هم‌واره به دیوار تکیه داشته باشد.

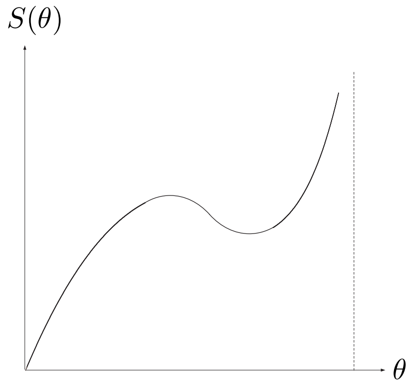
ب) بیشینه طولِ میله چه‌قدر باشد تا میله سرِ پیچ گیر نکند؟

مسئله‌یِ26) سطحِ شیب‌داری در نقطه‌یِ O لولایی دارد که توسطِ آن می‌توان شیبِ سطح را تغییر داد. از نقطه‌یِ O گلوله‌ای را با سرعتِ اولیه‌یِ اُفقی‌یِ v_0 پرتاب می‌کنیم. گلوله در فاصله‌یِ S از نقطه‌یِ O به سطح برخورد می‌کند. با تغییرِ شیبِ سطح S تغییر می‌کند. کدام گزینه می‌تواند نمودارِ S برحسبِ θ باشد؟

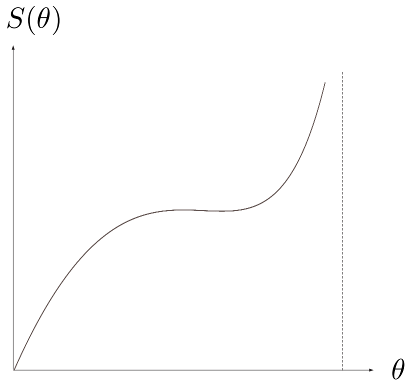


الف)


ب)




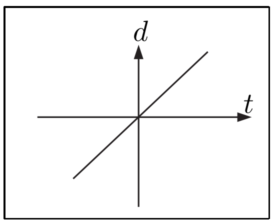
ج)



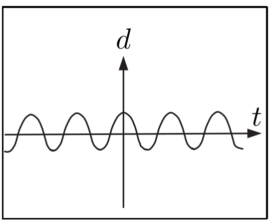
د)

مسئله‌یِ27) دو متحرک با سرعت‌هایِ ثابتِ v_1 و v_2 در جهتِ عکسِ هم‌دیگر رویِ دایره‌ای حرکت می‌کنند. دو متحرک وقتی به می‌رسند از هم‌دیگر رد می‌شوند. نمودارِ فاصله‌یِ دو متحرک از هم، d، برحسبِ زمان t کدام‌یک از شکل‌هایِ زیر می‌تواند باشد؟

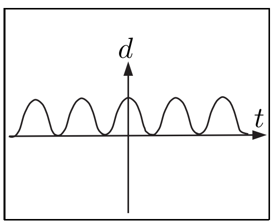
الف—



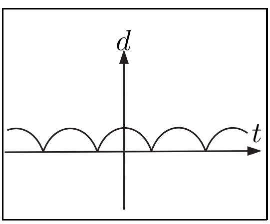
ب—



ج—



د—



مسئله‌یِ28) ذره‌ای را در نقطه‌یِ A در میدانِ گرانشی‌یِ یک‌نواختی در نظر بگیرید. سطحِ شیب‌داری با اصطکاکِ ناچیز که شیبِ آن را به دل‌خواه می‌توان تغییر داد، در نقطه‌یِ A لولا شده است. در زمانِ $t = 0$ ذره را از نقطه‌یِ A رها می‌کنیم. در زمانِ $t = T$ ذره به نقطه‌یِ B_1 می‌رسد. اگر شیبِ سطحِ شیب‌دار کمی بیش‌تر بود ذره به نقطه‌یِ B_2 می‌رسید و با تغییرِ شیبِ سطحِ شیب‌دار ذره در مدتِ T از نقطه‌یِ A

به ترتیب به نقاطِ B_3، B_4، $\cdots$ می‌رسید. نقاطِ B_1، B_2، B_3، B_4، و $\cdots$ رویِ چه منحنی‌ای قرار دارند؟

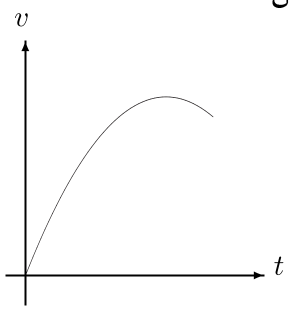
مسئله‌یِ29) شعاعِ زمین حدودِ 6400 km است. سرعتِ یک جسم رویِ استوا به واسطه‌یِ دورانِ زمین دورِ خودش بر حسبِ کیلومتر بر ساعت [km/h] به کدام عدد نزدیک‌تر است؟ زمین در روز یک‌بار به دورِ خودش می‌گردد.

الف) 17 km/h ب) 170 km/h ج) 1700 km/h د) 17000 km/h

مسئله‌یِ30) صفحه‌ی مداری زمین و مریخ به دور خورشید، بر هم منطبق است. مدار زمین و مریخ دایره‌ای است. زمین و مریخ در یک جهت دور خورشید می‌گردند و دوره‌ی گردش مریخ بیش از دوره‌ی گردش زمین است. فرض کنید در یک زمان، زمین روی خط واصل خورشید و مریخ، و میان آن‌ها است. پس از 780 روز، برای اولین بار این وضعیت تکرار می‌شود. دوره‌ی گردش مریخ چند روز است؟

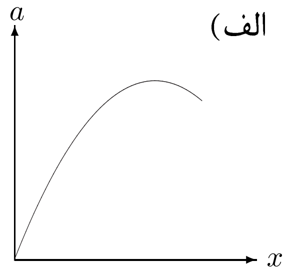
الف) 768 ب) 686 ج) 780 د) 249 ه) 730 و) 830

مسئله‌یِ31) نمودار سرعت- زمان یک متحرک مطابق شکل است.

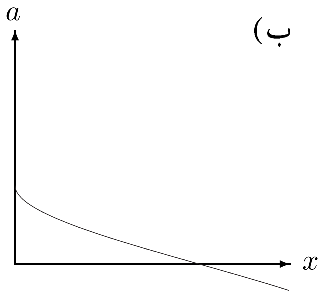


نمودار شتابِ ذره بر حسب مکان کدام می‌تواند باشد؟

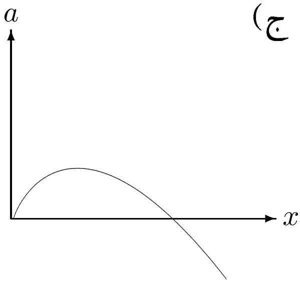
الف)



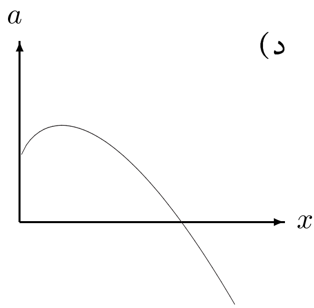
ب)



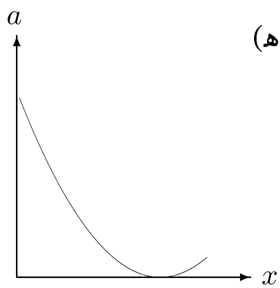
ج)



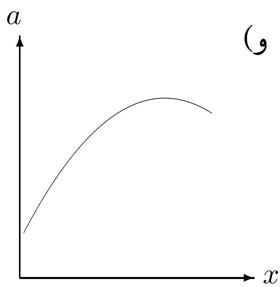
د)



ه)



و)



فصل ۳

دینامیک

۳—۱ قوانینِ نیوتن

قوانینِ نیوتن سه تا هستند:

۱) تا وقتی که به جسمی نیرو وارد نشود بردارِ سرعتِ آن ثابت است. جسم ممکن است ساکن باشد یا با سرعتِ ثابت حرکت کند.

۲) اگر به جسمی به جرمِ m نیرویِ $\mathbf{F}$ وارد شود، این جسم با شتابِ $\mathbf{a}$ حرکت می‌کند، به طوری که $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

۳) اگر جسمِ 1 به جسمِ 2 نیرویِ $\mathbf{F}$ را وارد کند، جسمِ 2 هم به جسمِ 1 نیرویِ $-\mathbf{F}$ وارد می‌کند، یعنی نیرویی به همان اندازه ولی در جهتِ عکس[1].

بحث‌هایِ زیادی شده است که چه بخشی از آن‌چه قوانینِ نیوتن نامیده می‌شود واقعاً قانونِ فیزیکی هستند و چه بخشی ار آن تعریف هستند. چه بخش‌هایی از این‌ها

[1] این شکلِ ضعیفِ قانونِ سومِ نیوتن است. در این شکل نقطه‌یِ اثرِ نیرو وارد نمی‌شود. شکلِ دیگری از قانونِ سوم با عنوانِ شکلِ قوی نیز وجود دارد.

ابطال‌پذیرند[2] و چه بخش‌هایی تعریف هستند.

از قانونِ اول شروع کنیم. چند کمیتِ فیزیکی در این قانون وارد شده اند. یکی سرعت است که کمیتی هندسی است و قبلاً آن را تعریف کرده‌ایم. کمیتِ دیگر نیرو است. ما هنوز روشی برایِ سنجشِ نیرو معرفی نکرده‌ایم. در قانونِ اول راجع به حالتی که نیرو صفر است صحبت می‌شود. پس کار کمی ساده‌تر است. بیایید حالتی که نیرو صفر است را حالتی بگیریم که برهم‌کنشی وجود ندارد و برهم‌کنشِ هر جسم هم با محیطِ اطرافش است. برایِ آزمودنِ قانونِ اول باید ترتیبی دهیم که نیرویی به جسم وارد نشود. برایِ آن‌که به جسمی نیرو وارد نشود باید در اطرافش تا حدِ امکان چیزی وجود نداشته باشد. سرعتِ یک جسم کمیتی است که به چارچوب بستگی دارد. فرض کنید ما بتوانیم آزمونی ترتیب دهیم که به ذره نیرویی وارد نشود و چارچوبی هم پیدا کنیم که سرعتِ ذره نسبت به آن ثابت باشد. این چارچوب را چارچوبِ لَخت می‌نامیم. حالا بیایید چارچوب‌هایی را در نظر بگیریم که نسبت به چارچوبِ لخت شتاب‌دار باشند. در این‌گونه چارچوب‌ها به ذره نیرویی وارد نمی‌شود ولی سرعتِ ذره نسبت به آن‌ها ثابت نیست. پس به نظر می‌رسد که قانونِ اولِ نیوتن در بعضی چارچوب‌ها درست است و در بعضی دیگر نادرست است. تا این‌جا ما فقط چارچوب‌هایِ لخت را تعریف کرده‌ایم. آیا چیزی برایِ آزمودن وجود دارد؟ بگذارید دوباره به مسئله برگردیم. یک ذره را در نظر گرفتیم که نیرویی به آن وارد نمی‌شد و در یک چارچوب که چارچوب لخت نامیدیمش سرعتِ ذره ثابت و قانونِ اول نیوتن درست بود. در هر چارچوبِ دیگری که نسبت به چارچوبِ لخت با سرعتِ ثابت حرکت کند نیز قانونِ اولِ نیوتن درست است. ما به همه‌یِ این چارچوب‌ها نیز چارچوبِ لخت می‌گوییم. کاری که تا به حال انجام دادیم در واقع این است که با استفاده از قانونِ اول چارچوبِ لخت را تعریف کردیم. حالا که چارچوبِ لخت را تعریف کرده‌ایم، می‌توانیم

[2] گزاره‌یِ ابطال‌پذیر یعنی گزاره‌ای که باطل‌بودنِ یا نبودنِ آن را می‌توان سنجید یعنی با ترتیب‌دادنِ یک آزمایش می‌توان درستی یا نادرستی‌یِ آن را وارسی کرد.

قانونِ اول را برایِ ذره‌ای دیگر که نیرویی به آن وارد نمی‌شود بیازماییم. این بخش، بخشِ آزمون‌پذیرِ قانونِ اولِ نیوتن است. ممکن بود که برایِ ذره‌یِ دوم قانونِ نیوتن در چارچوبی لخت برقرار نباشد. اما در دنیایِ ما این‌طور نیست و قانونِ اولِ نیوتن معتبر است. پس چارچوبِ لخت چارچوبی است که در آن سرعتِ همه یِ ذره‌هایِ آزاد ثابت است و بیانِ قانونِ اولِ نیوتن این است که چنین چارچوبی وجود دارد.

حالا بیایید به قانونِ دوم بپردازیم. در قانونِ دومِ نیوتن کمیتِ جدیدِ جرم معرفی می‌شود. در ضمن حالا دیگر نیرو لزوماً صفر نیست و باید معیاری برایِ سنجش نیرو داشته باشیم. ما یک تصورِ کیفی از اندازه‌یِ نیرو داریم. وقتی جسمی را هُل می‌دهیم یا می‌کشیم به آن نیرو وارد می‌کنیم. هرچه جسم را محکم‌تر هل دهیم یا بکشیم نیرویِ بزرگ‌تری به آن وارد می‌کنیم. اما این تصورِ کیفی کافی نیست و ما باید یک معیارِ دقیق‌تر برایِ اندازه‌یِ نیرو داشته باشیم. گاهی گفته می‌شود نیوتن، N، واحدِ نیرو است و 1N نیرویی است که به جرمِ 1 kg شتابِ $1\ \mathrm{m/s^2}$ می‌دهد. توجه داریم که در این تعریف هم 1 kg وارد شده که خودش احتیاج به تعریف دارد و هم‌این‌که در تعریفِ نیرو فرض شده که قانونِ دومِ نیوتن درست است. در این‌جا قانونی که می‌خواهیم بیازماییم را درست فرض کرده‌ایم. برایِ بحثِ دقیق‌تر لازم است ابتدا جرم را تعریف کنیم. ما در این‌جا از یک تعریفِ عملیاتی استفاده می‌کنیم. یک جسم را برمی‌داریم و آن را به عنوانِ جرمِ واحد، مثلاً 1 کیلوگرم، kg، انتخاب می‌کنیم. حالا سئوال این‌است که جرمِ مثلاً 2 کیلوگرم چه‌قدر است؟ آیا اگر دو جرمِ 1 کیلوگرمی را به هم بچسبانیم جرمِ حاصلِ 2 کیلوگرم است؟ بعضی از کمیت‌هایِ فیزیکی این‌طور رفتار می‌کنند یعنی فزون‌ور هستند. مثلاً حجمِ یک ظرفِ آب کمیتی فزون‌ور است. ولی دما این‌طور نیست. اگر دو ظرف آب با حجم‌ها و دماهایِ یک‌سان را با هم مخلوط کنیم دمایِ نهاییِ‌یِ آب همان دمایِ اولیه است، یعنی دمایِ نهایی مجموعِ دو دمایِ اولیه نیست، ولی حجمِ حاصل مجموعِ حجمِ آب‌ها است. از کجا بدانیم که جرم کمیتی فزون‌ور یا نافزون‌ور است. ممکن است استدلال شود جرم آن‌چیزی است که ترازویِ فنری

نشان می‌دهد و چیزی که نیروسنج یا ترازویِ فنری نشان می‌دهد فزون‌ور است. اما از کجا بفهمیم آن‌چیزی که ترازویِ فنری نشان می‌دهد همان کمیتی است که در قانونِ دومِ نیوتن به عنوانِ جرم وارد می‌شود؟ بیایید همان روشِ عملیاتی‌یِ خود را ادامه دهیم. جرمِ 1 را انتخاب کردیم. بقیه‌یِ جرم‌ها را با استفاده از قانونِ دومِ نیوتن تعریف کنیم. یک نیروسنجِ فنری برداریم و با آن جرمِ $m_0 = 1$ کیلوگرمی را رویِ سطحی کاملاً صیقلی بکشیم. هرگاه مثلاً طولِ فنرِ کشیده‌شده مقدارِ معینِ l شد، شتاب ِجرمِ 1 کیلوگرمی را اندازه می‌گیریم. فرض کنید شتاب بشود a_0. حالا بیایید با همین فنر و با همان طولِ کشیده‌شده‌یِ l جرمِ مجهولِ m_1 را رویِ همان سطحِ صیقلی بکشیم. شتابِ m_1، a_1 می‌شود. با فرضِ درستی‌یِ قانونِ دومِ نیوتن، m_1 معین می‌شود

$$m_1 \times a_1 = m_0 \times a_0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{a_0}{a_1} m_0 = \frac{a_0}{a_1}\ (\mathrm{kg}). \tag{1}$$

در این‌جا فرض کرده‌ایم که سطح آن‌چنان صیقلی است که مانعی در جهتِ حرکتِ جرم‌ها ایجاد نمی‌کند و هر وقت فنری طولِ کشیده‌شده‌اش یک مقدارِ معین شد یک نیرویِ معین را وارد می‌کند. با این روشِ عملیاتی می‌توانیم همه‌یِ جرم‌ها را علی‌الاصول تعریف کنیم. حالا برگردیم به این سئوال که چه نکاتِ آزمون‌پذیری در قانونِ دوم وجود دارد. جرمِ $1\ \mathrm{kg}$ را که انتخاب کردیم. بقیه‌یِ جرم‌ها و نیرویِ $1\mathrm{N}$ را با استفاده از قانونِ دوم و فرضِ درستی‌یِ آن تعریف کردیم. حالا بیایید جرم‌هایِ m_1 و m_2 را با یک نیرویِ یک‌سان، یعنی فنری که طولِ کشیده‌شده‌اش یکی است، ولی لزوماً مقدارِ l نیست، بکشیم، شتابِ آن‌ها a_1 و a_2 می‌شود. در تجربه می‌بینیم که

$$m_1 a_1 = m_2 a_2. \tag{2}$$

این از نکاتِ آزمون‌پذیرِ قانونِ دومِ نیوتن است.

این‌که m یک کمیتِ عددی‌یِ (اسکالرِ) فزون‌ور است را نیز می‌توانیم با تجربه محک بزنیم. مثلاً دو جرمِ m_1 و m_2، که قبلاً تعریفِ‌شان کرده‌ایم، را وقتی به هم بچسبانیم مثلِ یک جرمِ $m_1 + m_2$ رفتار می‌کند. این مورد را نیز می‌توانیم با انجامِ آزمایش بسنجیم.

قانونِ دومِ نیوتن یک معادله‌یِ برداری است. جرمِ m یک اسکالرِ فزون‌ور و شتاب کمیتی برداری است. پس نیرو نیز باید کمیتی برداری باشد. این نیز آزمون‌پذیر است. اگر به جسمی نیروهایِ $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ که در یک راستا نیستند وارد شود نیرویِ حاصل در جهتِ جمعِ برداری‌یِ این دو نیرو است. یعنی می‌بینیم که جسم در آن جهت شتاب می‌گیرد. این را نیز می‌توانیم بسنجیم.

حالا می‌رسیم به قانونِ سوم. کمیتی که در این قانون وارد شده باشد و دقیقاً تعریف نشده باشد نداریم. قانونِ سوم یک قانونِ خالص است و کاملاً آزمون‌پذیر. بنا بر تجربه این قانون در خیلی جاها درست است[3]. مطابقِ این قانون به ازایِ هر جفت‌ذره‌ای که با هم برهم‌کنش دارند دو نیرویِ عمل و عکس‌العمل بینِ آن ها وجود دارد. این‌که کدام نیرو را عمل و کدام را عکس‌اعمل بنامیم، یک نام‌گذاری‌یِ صرف است و هیچ اهمیتِ فیزیکی ندارد. یادآوری‌یِ این نکته هم خالی از فایده نیست که نیروهایِ عمل و عکس‌العمل به دو جسمِ مختلف وارد می‌شوند. این قانون می‌گوید به ازایِ هر نیرویی که توسطِ جسمِ 2 به جسمِ 1 وارد شود، نیرویی به همان اندازه ولی در جهتی معکوس از طرفِ جسمِ 1 به جسمِ 2 وارد می‌شود. اگر تنها یک ذره در این دنیا بود نیرویی به آن وارد نمی‌شد. حالا که دنیا پُر از ذراتِ مختلف است ذرات به خاطرِ نیروهایی که به هم وارد می‌کنند ممکن است شتاب بگیرند.

چنان‌که دیدیم قوانین نیوتن هم بخش‌هایی داشت که تعریف است و هم بخش‌هایی که آزمون‌پذیر است. این قانون با دقتِ خوبی در خیلی از مسائلی که در زندگی‌یِ روزمره با آن‌ها سروکار داریم با تجربه مطابقت دارد. اما باید توجه داشته باشیم که

[3]وقتی سرعتِ ذرات زیاد است، قانونِ سومِ نیوتن درست نیست.

این قوانین در سرعت‌هایِ بالا و در دنیایِ میکروسکوپیک درست نیستند. در این دو محدوده فیزیکِ نسبیتی و فیزیکِ کوانتمی با دقتِ بالاتری با تجربه می‌خوانند.

برایِ تحلیل یک مسئله در مکانیک لازم است نیروهای وارد به جسم از طرفِ محیطِ اطرافش را بشناسیم. پس از شناساییِ نیروهایِ وارد بر جسم برآیندِ برداریِ نیروهایِ وارد بر جسم را به دست می‌آوریم. برآیندِ برداریِ این نیروها شتابِ جسم را تعیین می‌کند. نموداری به نامِ نمودارِ جسمِ آزاد رسم می‌شود. در این نمودار نیروهایِ وارد بر جسم کشیده می‌شوند. با انتخابِ دستگاه مختصاتِ مناسب و تجزیه‌یِ نیرویِ برآیند و شتاب در جهت‌هایِ مختلفِ دستگاه معادله‌یِ نیوتن که معادله‌ای برداری است به چند معادله‌یِ اسکالر تبدیل می‌شود.

نیروهایی که اجسام به هم وارد می‌کنند بسیار متنوع‌اند. بعضی از آن ها نیروهایِ بنیادیِ طبیعت هستند، مثلِ نیرویِ جهانیِ گرانش یا نیرویِ کولنی در الکترومغناطیس. نیروهایی دیگری هم هستند که منشأِ آن‌ها نیز نیروهایِ بنیادی است ولی ما یک نگاهِ پدیده‌شناسانه به آن‌ها داریم، مثلِ نیرویِ اصطکاک یا نیرویِ فنر. نیرویِ اصطکاک ناشی از برهم‌کنشِ الکترومغناطیسیِ ذراتِ دو جسمی است که با هم در تماس‌اند. هر کدام از جسم‌ها از تعدادِ بسیار زیادی ذره‌یِ باردار[4] تشکیل شده است. ممکن است بخواهیم نیرویِ اصطکاک بینِ دو جسم را به صورتِ جمعِ نیروهایِ بنیادی‌تر الکترومغناطیسی بینِ ذراتِ دو جسم بنویسیم. اما این رابطه عملاً به درد نمی‌خورد. معمولاً با استفاده از تجربه روابطی برایِ این دسته از نیروها می‌نویسیم. بیایید چند تا از این نیروها را بررسی کنیم.

[4] مثلاً از مرتبه‌یِ عددِ آووگادرو یعنی حدودِ 10^{24}.

۳–۲ وزن

به هر جسمی در سطحِ زمین نیرویی کششی از طرفِ زمین وارد می‌شود. به این نیرو وزن می‌گوییم. مطابقِ قانونِ جهانی‌یِ گرانش، که بعداً به آن خواهیم پرداخت، بینِ هر دو جرمِ m_1 و m_2 که در فاصله‌یِ r از هم باشند نیرویِ جاذبه‌ای به اندازه‌یِ $G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ وجود دارد. $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\ s^2)}$ را ثابتِ جهانی‌یِ گرانش می‌نامیم. اجسامی که در نزدیکی‌یِ سطحِ زمین هستند r تقریباً شعاعِ زمین، R، است. پس به جسمی به جرمِ m که رویِ سطحِ زمین است نیرویِ mg وارد می‌شود که

$$g = G\frac{M}{R^2}, \tag{3}$$

که M جرمِ زمین است. این نیرو در راستایِ شعاعِ زمین و به سمتِ داخل است. مقدارِ عددی‌یِ $g \approx 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ است. عکس‌العملِ نیرویِ وزن، نیرویی است که از طرفِ جسم به مرکزِ زمین وارد می‌شود. اندازه‌یِ این نیرو هم همان mg است.

مثالِ1) فرض کنید جرمِ m را رها کنیم و مقاومتِ هوا ناچیز باشد. با استفاده از قانونِ دومِ نیوتن شتابِ سقوطِ جرمِ m به دست می‌آید.

$$m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{g}. \tag{4}$$

می‌بینیم که در غیابِ مقاومتِ هوا شتابِ سقوطِ همه‌یِ اجسام برابر است. اگر مقاومتِ هوا را در نظر بگیریم مسئله فرق می‌کند که بعداً به آن خواهیم پرداخت. بیایید ببینیم به خاطرِ این نیرو زمین چه‌قدر شتاب می‌گیرد

$$mg = MA \quad \Rightarrow \quad A = \frac{m}{M}g = G\frac{m}{R^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11}}{(6400 \times 1000)^2}m \quad (\mathrm{m/s^2}) \tag{5}$$

برایِ یک جرمِ 1 کیلوگرمی این شتاب $A \approx 1.6 \times 10^{-24}\ \mathrm{m/s^2}$ است. بنابراین زمین عملاً ساکن است.

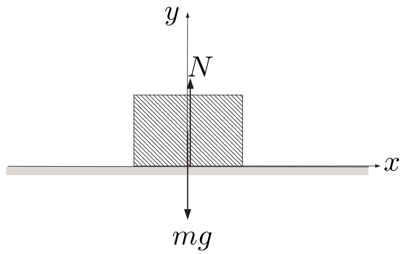
۳–۳ نیرویِ سطح

وقتی جسمی را رویِ سطحی قرار می‌دهیم از طرفِ سطح به جسم نیرویی وارد می‌شود. این نیرو را به دو نیرویِ عمود بر سطح و مماسِ به سطح تجزیه می‌کنیم. به مؤلفه‌یِ عمودی نیرویِ عمودی‌یِ سطح و به نیرویِ مماسی نیرویِ اصطکاک می‌گوییم. بیایید این دو مؤلفه را جدا بررسی کنیم.

۳–۳–۱ نیرویِ عمودی‌یِ سطح

وقتی جسمِ m را رویِ سطحی قرار می‌دهیم اگر آن سطح نبود جسم می‌اُفتاد ولی سطح جلویِ افتادنِ آن را می‌گیرد. در واقع سطح به خاطرِ نیرویی که جسم به آن وارد می‌کند کمی تغییرِ شکل می‌دهد. عکس‌العملِ این نیرو که توسطِ سطح به جسم وارد می‌شود، همان نیرویِ عمودی‌یِ سطح است. در واقع سطح مثلِ یک فنرِ سخت رفتار می‌کند. این نیرو ماهیتاً الکترومغناطیسی است و به خاطرِ برهم‌کنشِ بین ذراتِ تشکیل دهنده‌یِ جسم و سطح است. اما محاسبه‌یِ نیرویِ بینِ ذراتِ تشکیل‌دهنده‌یِ جسم وسطح نه عملی است و نه مفید. نیرویِ عمودی‌یِ سطح مقدارش از پیش معین نیست و با تغییرِ شرایطِ مسئله عوض می‌شود. در واقع ما با استفاده از قانونِ نیوتن و داشتنِ شتابِ جسم نیرویِ عمودی‌یِ سطح را به دست می‌آوریم. اگر نیرویِ عمودی‌یِ سطح که از طرفِ سطح به جرمِ m وارد می‌شود را با N نمایش دهیم، عکس‌العملِ آن نیز همان اندازه است و از طرفِ جسم به سطح وارد می‌شود.

مثالِ2) مطابقِ شکلِ (۳–۱) جرمِ m رویِ سطحی ساکن است. چون ساکن است، شتابِ آن صفر است. پس



شکل ۳–۱: نیروهایِ وارد بر جسمی که رویِ سطحی ساکن است.

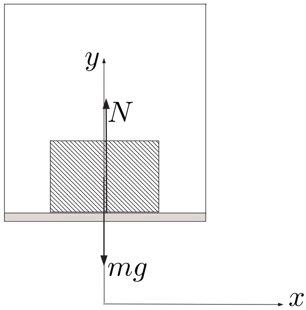
$$-mg + N = ma = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg. \tag{6}$$

N نیرویِ عمودی‌یِ سطح است. در سقوطِ آزاد ما نیرویِ وارد بر جسم را داشتیم و با استفاده از قانونِ نیوتن شتابِ جسم را به دست آوردیم. در این مثال ما شتابِ جسم و یکی از نیروها را داریم و با استفاده از قانونِ دومِ نیوتن نیرویِ دیگر را به دست آوردیم. این که شتاب معین است یک قید است. قید یعنی رابطه‌ای از پیش‌تعیین‌شده برایِ مکانِ جسم، که در این‌جا $y = 0$ است. به ازایِ هر قیدی یک نیرویِ قیدی وجود دارد. نیرویِ قیدی نیرویی است که قید را برقرار نگه می‌دارد. در این مسئله نیرویِ عمودی‌یِ سطح نیرویِ قیدی است. در مواقعی که نیرویِ قیدی داریم با استفاده از قانونِ نیوتن و قیدِ مسئله نیرویِ قیدی را به دست می‌آوریم.

مثالِ3) فرض کنید جرمِ m رویِ کفِ آسانسوری ساکن است(شکلِ (۳–۲)). آسانسور با شتابِ ثابتِ A حرکت می‌کند. پس

$$-mg + N = ma = mA \quad \Rightarrow \quad N = m(g + A). \tag{7}$$

جهتِ مثبت را رو به بالا گرفته‌ایم. بسته به این‌که شتابِ آسانسور مثبت $(A > 0)$ یا منفی $(A < 0)$ باشد، نیرویِ عمودی‌یِ سطح بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از وزنِ جسم است. در این‌جا قید $y = \frac{1}{2}At^2$ است. اگر خودمان را با ترازویی فنری در آسانسور وزن کنیم



شکل ۳—۲: نیروهایِ وارد بر جسمی که رویِ کفِ آسانسوری قرار دارد.

وقتی آسانسور شتابش رو به بالا (رو به پایین) است ترازو وزنِ بیش‌تری (کم‌تری) را نشان می‌دهد.

۳—۳—۲ نیرویِ مماسی‌یِ سطح یا اصطکاک

این نیرو نیز ماهیتاً الکترومغناطیسی است و ناشی از برهم‌کنشِ بین ذراتِ تشکیل دهنده‌یِ جسم و سطح است. در صورتی که جسم نسبت به سطح ساکن باشد به نیرویِ اصطکاک، اصطکاکِ ایستایی می‌گوییم و با f_s نمایش می‌دهیم. در صورتی که جسم نسبت به سطح در حرکت باشد به اصطکاک، اصطکاکِ جنبشی می‌گوییم و با f_k نمایش می‌دهیم. این دو نوع اصطکاک تفاوت‌هایی با هم دارند که به آن‌ها خواهیم پرداخت.

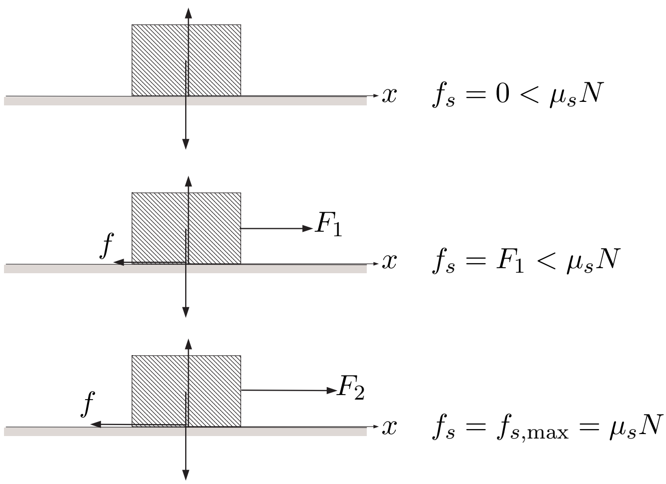
جسمی به جرمِ m را در نظر بگیرید که رویِ سطحی ساکن است. در این حالت مسئله مقید است. علاوه بر قیدِ $y = 0$ که قبلاً در موردِ آن حرف زدیم قیدِ $x = 0$ نیز وجود دارد. چون شتابِ اُفقی‌یِ جسم صفر است، مؤلفه‌یِ اُفقی‌یِ نیرویِ برآیند هم باید صفر باشد. در صورتی که هیچ نیرویِ افقی‌ای به آن وارد نکنیم، هیچ نیرویِ

مماسی‌ای هم از طرفِ سطح به آن وارد نمی‌شود. پس در این حالت نیرویِ اصطکاک، f_s، صفر است. توجه داریم که نیرویِ اصطکاکِ ایستایی یک نیرویِ قیدی می‌شود. این نیرو نیز اندازه‌اش معین نیست و با تغییرِ شرایطِ مسئله اندازه‌اش تغییر می‌کند. شکلِ (۳–۳) را ببینید. حالا فرض کنید جرمِ m را با نیرویِ F_1 می‌کشیم ولی هنوز نیرو آن‌قدر بزرگ نیست تا جسم را حرکت دهد. باز هم چون جسم ساکن است نیرویِ برآیند صفر است. پس

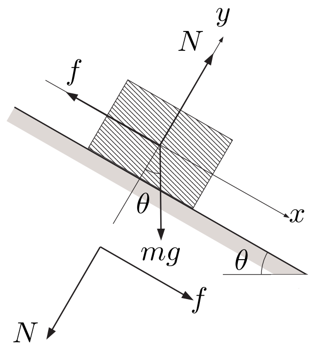
$$F_1 - f_s = 0 \quad \Rightarrow \quad f_s = F_1. \tag{8}$$

اگر نیرویِ خارجی را بزرگ کنیم تا وقتی که جسم شروع به حرکت نکرده نیرویِ اصطکاک با نیرویِ خارجی برابر است. در این‌جا نیرویِ اصطکاکِ ایستایی نیرویی قیدی است. این نیرویِ قیدی قیدِ $x = 0$ را برقرار نگه می‌دارد. دیده‌ایم که یک مقدارِ بیشینه‌ای برایِ نیرویِ خارجی وجود دارد که اگر نیرو از آن مقدار بزرگ‌تر شود جسم در آستانه‌یِ حرکت قرار می‌گیرد. با گذشتن از این مقدارِ آستانه جسم شروع به حرکت می‌کند. از مشاهده‌یِ تجربی به دست می‌آید که این مقدارِ آستانه با نیرویِ عمودی‌یِ سطح متناسب است. ضریبِ تناسب که با μ_s نمایش می‌دهیم مقداری ثابت است که به جنسِ دو سطحِ در تماس بستگی دارد. هرچه سطح‌ها زبرتر باشند مقدارِ μ_s بزرگ‌تر است. و معمولاً هرچه سطح‌ها صاف‌تر و صیقلی‌تر باشند این مقدار کوچک‌تر می‌شود. البته اگر سطح‌ها آن‌قدر صاف و صیقلی باشند که نقاطِ تماسِ بینِ دو سطح زیاد شود، دو سطح به هم می‌چسبند و μ_s ممکن است خیلی بزرگ شود. نیرویِ بیشینه‌ای که اگر جسم را با آن بکشیم در آستانه‌یِ حرکت قرار می‌گیرد، $f_{s,\max} = \mu_s N$، است. چون این مقدارِ بیشینه با N متناسب است مهم نیست که جسم را از کدام سمت رویِ زمین بگذاریم، مگر آن‌که زبری‌یِ سطح‌هایِ مختلفِ جسم با هم فرق کند.

اگر نیرویِ وارد به جسم آن‌قدر بزرگ شود که جسم شروع به حرکت کندِ قیدِ $x = 0$ شکسته می‌شود و از این پس اصطکاک، از نوعِ اصطکاکِ جنبشی یعنی f_k



شکل ۳—۳: نیرویِ اصطکاکِ ایستایی مقدارِ از پیش‌تعیین‌شده‌ای ندارد. تنها بیشینه‌اش معین است.



شکل ۳—۴:   شکلِ مربوط به مثالِ 4.

است. از تجربه در می‌یابیم که f_k با نیرویِ عمودی‌یِ سطح، N، متناسب است، $f_k = \mu_k N$. ضریبِ μ_k تابعی کندتغییر از سرعت است و در ناحیه‌یِ وسیعی از سرعت تقریباً ثابت است. معمولاً و برای بیش‌تر مواد اصطکاکِ جنبشی کوچک‌تر یا مساوی‌یِ اصطکاکِ ایستایی‌یِ بیشینه است، پس $\mu_k \leq \mu_s$.

مثالِ4) مطابقِ شکلِ (۳—۴) جسمی به جرمِ m را رویِ سطحِ شیب‌داری با زاویه‌یِ شیبِ θ قرار می‌دهیم. ضریبِ اصطکاکِ جسم با سطح، μ_s، چه‌قدر باشد تا جسم رویِ سطح ساکن بماند؟ قدمِ اول در حلِ این مسئله پیداکردنِ نیروهایی است که به جسم وارد می‌شود:

۱) نیرویِ وزن که نیرویِ گرانشِ زمین است. عکس‌العملِ این نیرو به زمین وارد می‌شود.

۲) نیرویِ عمودی‌یِ سطح که از طرفِ سطحِ شیب‌دار وارد می‌شود. عکس‌العملِ آن به سطحِ شیب‌دار وارد می‌شود.

۳) نیرویِ اصطکاک که مماسی است و آن‌هم از طرفِ سطحِ شیب‌دار وارد می‌شود.

عکس‌العملِ آن نیز به سطحِ شیب‌دار وارد می‌شود.

قدمِ بعدی انتخابِ دستگاهِ مناسب است. اگر محورهایِ xy را مطابقِ شکل در راستایِ سطحِ شیب‌دار و عمود بر آن بگیریم کافی است که فقط یکی از نیروها را تجزیه کنیم.

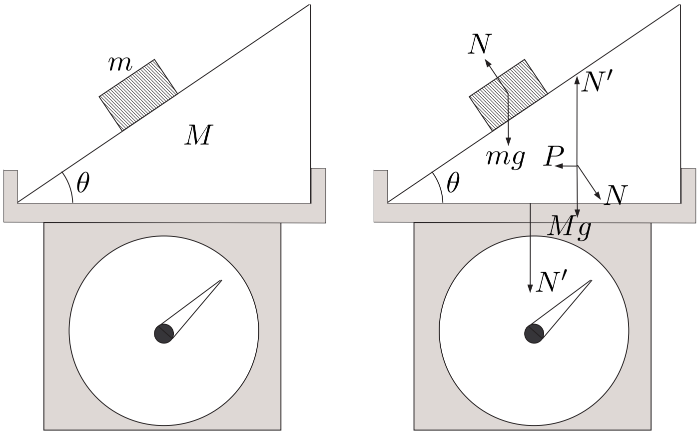
قدمِ آخر نوشتنِ قانونِ نیوتن و حلِ آن است.

$$N - mg\cos\theta = 0$$
$$mg\sin\theta - f_s = 0. \tag{9}$$

چون می‌خواهیم جسم رویِ سطح ساکن بماند اصطکاک ایستایی است و $f_s \le \mu_s N$. پس

$$mg\sin\theta \le \mu_s mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \mu_s \ge \tan\theta. \tag{10}$$

مثالِ5) مطابقِ شکلِ (۳—۵) جسمی به جرمِ m که رویِ سطحِ شیب‌داری به جرمِ M و زاویه‌یِ شیبِ θ است را رویِ ترازویی فنری قرار می‌دهیم. اصطکاکِ سطح‌ها را ناچیز بگیرید. می‌خواهیم ببینیم ترازو چه نیرویی را نشان می‌دهد؟ توجه کنید که این نیرو Mg نیست زیرا Mg نیرویی است که توسطِ زمین به سطحِ شیب‌دار وارد می‌شود. در ضمن $Mg + mg$ هم نیست چون این‌ها دو نیرو هستند که به دو جسمِ مختلف وارد می‌شوند. عددی که ترازو نشان می‌دهد اندازه‌یِ نیرویِ قائمی است که توسطِ سطحِ شیب‌دار به آن وارد می‌شود. چنان‌که در شکل می‌بینید نیرویِ عمودی‌یِ N' از طرفِ ترازو به سطحِ شیب‌دار وارد می‌شود و عکس‌العملِ آن نیز از طرفِ سطحِ شیب‌دار به ترازو وارد می‌شود. بنا بر این N' نیرویی است که ترازو نشان می‌دهد. برایِ آن‌که N' را محاسبه کنیم، باید قانونِ نیوتن را برایِ جرم‌هایِ m و M بنویسیم. نیروهایِ وارد بر

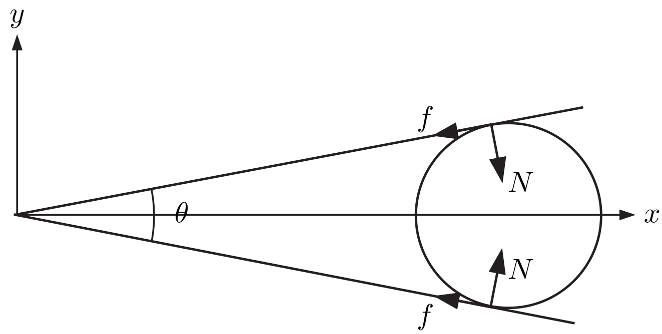


شکل ۳—۵: شکلِ مربوط به مثالِ 5.

m، نیرویِ وزن mg، و نیرویِ عمودیِ سطح N هستند. عکس‌العملِ N به سطحِ شیب‌دار وارد می‌شود. علاوه بر این، سه نیرویِ دیگر هم به سطحِ شیب‌دار وارد می‌شود: نیرویِ وزنِ سطحِ شیب‌دار، Mg، نیرویِ عمودیِ سطح، N'، و یک نیرویِ اُفقیِ P. عکس‌العملِ N که به سطحِ شیب‌دار وارد می‌شود سطحِ شیب‌دار را به عقب هُل می‌دهد. نیرویِ اُفقیِ P، نیرویی است که از طرفِ کفه‌یِ ترازو به سطحِ شیب‌دار وارد می‌شود و جلویِ حرکتِ سطحِ شیب‌دار به سمتِ عقب را می‌گیرد. قانونِ نیوتن برایِ این دو جرم عبارت است از

$$\begin{aligned}
&mg\sin\theta = ma,\\
&N - mg\cos\theta = 0,\\
&N' - Mg - N\cos\theta = 0,\\
&P - N\sin\theta = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

از معادله‌یِ دومِ دسته معادله‌هایِ بالا N و از معادله‌یِ سومِ آن N' به دست می آید



شکل ۳–۶: شکلِ مربوط به مثالِ 6.

$$N' = Mg + mg\cos^2\theta. \qquad (12)$$

بیایید رفتارِ حدّیِ جواب را بررسیِ کنیم. وقتی $\theta = 0$ باشد جرمِ m رویِ سطحی که حالا دیگر تخت است ساکن می‌ماند و ترازو $(m+M)g$ را نشان می‌دهد. جوابِ ما با جوابی که در این حد به دست می‌آید سازگار است. اگر $\theta = \pi/2$ باشد دیگر نیرویِ فشارنده‌ای از طرفِ m به M وارد نمی‌شود. در این‌صورت ترازو Mg را نشان می‌دهد. در این مورد نیز جوابِ ما رفتارِ حدیِ درستی دارد. اگر از اصطکاکِ بینِ جرمِ m و سطحِ شیب‌دار چشم‌پوشی نکنیم، ترازو چه وزنی را نشان می‌دهد؟

مثالِ6) وقتی می‌خواهیم سیمی را با قیچی ببُریم، می‌بینیم سیم اوّل روی تیغه‌های قیچی سُر می‌خورد، و وقتی زاویه‌ی بین تیغه‌های قیچی θ می‌شود متوقف می‌شود. از گرانش صرف نظر کنید. ضریب اصطکاک ایستایی بین تیغه و سیم چه قدر است؟

برایِ آن‌که سیم لیز نخورد باید جمعِ نیروهایِ وارد بر آن صفر باشد. شکلِ (۳–۶) را ببینید. اگر تقارن را در نظر بگیریم یعنی نیروهایی که دو لبه‌یِ قیچی به سیم وارد می‌کنند را مثلِ هم بگیریم تعادلِ نیروها در راستایِ y بدیهی می‌شود و اطلاعاتی در بر ندارد. اگر تقارن را در نظر نگیریم تعداد مجهول‌هایِ ما زیاد است و در

آن صورت معادله کم خواهیم داشت. در راستایِ x داریم

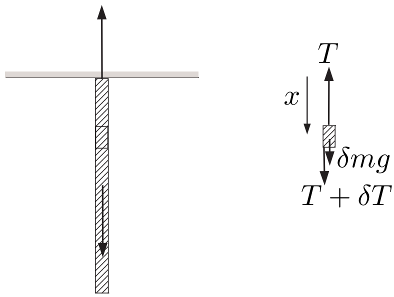
$$2N\cos\frac{\theta}{2} - 2f\sin\frac{\theta}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \cot\frac{\theta}{2}. \tag{13}$$

در این‌جا از این‌که در آستانه‌یِ لغزیدن $f = \mu N$ است، استفاده کرده‌ایم. اگر ضریبِ اصطکاکِ بینِ سیم و لبه‌هایِ قیچی خیلی کوچک باشد، باید زاویه‌یِ بینِ لبه‌هایِ قیچی را خیلی کوچک کنیم تا بتوانیم سیم را ببریم.

۳—۴ کشش

ما قبلاً از نیرویِ عمودی‌یِ سطح صحبت کردیم. آن نیرو وقتی ایجاد می‌شود که جسمی تحتِ فشار قرار گیرد. اگر جسمی تحتِ کشش قرار گیرد کمی تغییرِ شکل می‌دهد به این نیرو نیرویِ کشش می‌گوییم. هر چه جسم صلب‌تر باشد تغییرِ شکلِ آن کوچک‌تر است. در یک میله هم نیرویِ کشش می‌تواند باشد هم نیروی فشار. علاوه بر این به یک میله می‌توانیم نیرویِ عرضی هم وارد کنیم. وقتی یک ریسمان کشیده می‌شود نیرویِ کشش در آن به وجود می‌آید. به ریسمان نیرویِ فشاری نمی‌توان وارد کرد. ریسمانِ ایده‌آل ریسمانی است که هیچ نیرویِ عرضی را نیز نمی‌تواند تحمل کند و به ازایِ یک نیرویِ بسیار کوچک هم تا جایی تغییرِ شکل می‌دهد که هم‌راستا با نیرو شود. بنا بر این برایِ ریسمانِ ایده‌آل تنها نیرویِ کششی‌یِ در راستایِ ریسمان وجود دارد. هر وقت ریسمانی تحتِ کشش باشد نیرویِ کششِ ریسمان غیرِ صفر است و هرگاه ریسمان شُل شود کششِ آن صفر می‌شود. وقتی می‌گوییم کشش در نقطه‌ای از ریسمان T است یعنی این‌که دو بخشِ ریسمان که در دو طرفِ این نقطه هستند به هم نیرویِ T وارد می‌کنند.

مثالِ7) مطابقِ شکلِ (۳—۷) طنابی به جرمِ m و طولِ l را از سقف آویزان کرده‌ایم. مبدأ را بالایِ طناب و محورِ x را رو به پایین بگیرید. می‌خواهیم کشش را در طناب به



شکل ۳—۷: شکلِ مربوط به مثالِ 7.

دست آوریم.

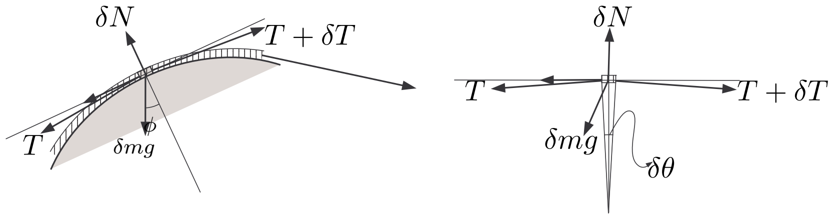
نیرویی به پایین‌ترین نقطه‌یِ طناب وارد نمی‌شود پس در پایین‌ترین نقطه یعنی $x = l$، کششِ طناب $T(l) = 0$ است. نیروهایی که به طناب وارد می‌شوند وزنِ آن mg و نیرویِ F است که از طرفِ سقف به آن وارد می‌شود. چون طناب ساکن است $F = mg$. نیرویِ کشش هم نیرویی قیدی است. قیدِ مسئله ثابت‌بودنِ طولِ طناب است. پس در بالاترین نقطه یعنی نقطه‌یِ $x = 0$،کششِ طناب $T(0) = mg$ است.

کشش در نقاطِ مختلفِ ریسمان فرق می‌کند. بیایید یک طولِ خیلی کوچکِ δx از طناب را در نظر بگیریم. جرمِ این عنصر از طناب $\delta m = m\ \delta x/l$ است. این عنصر از بالا و پایینِ نیز کشیده می‌شود. کششِ بالایِ آن را T و کششِ پایینِ آن را $T+\delta T$ بگیرید. شتابِ این عنصر صفر است، پس

$$T - T - \delta T - \delta m\, g = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta T = -\frac{mg}{l}\,\delta x. \tag{14}$$

پس اگر به ازایِ طولِ x در جهتِ طناب پایین بیاییم کششِ طناب به اندازه‌یِ $\frac{mgx}{l}$ کم می‌شود. بنا بر این کششِ طناب می‌شود

$$T(x) = mg - \frac{mgx}{l}. \tag{15}$$



شکل ۳—۸: شکلِ مربوط به مثالِ 8.

مثالِ8) طنابی به جرمِ m را رویِ سطحِ خمیده‌ای می‌کشیم. یک تکه‌یِ خیلی کوچک از طناب به جرمِ δm را در نظر بگیرید. شکلِ (۳—۸) را ببینید. اگر این عنصر از طناب را خیلی کوچک بگیریم، کمانِ کوچکی با زاویه‌یِ $\delta\theta$ از یک دایره است. کششِ دو سرِ این تکه از طناب T و $T+\delta T$ است. علاوه بر این دو نیرو، نیروهایِ وزن $\delta m\, g$، عمودی‌یِ سطح δN و اصطکاک δf نیز بر این عنصرِ طناب وارد می‌شوند. نیروهایِ کششِ طناب در ابتدا و انتهایِ آن مماس بر طناب در نقاطِ ابتدا و انتهایِ این بخش از طناب هستند. شتابِ طناب را a بگیرید. چون این عنصر رویِ یک خم حرکت می‌کند و هم اندازه و هم جهتِ سرعتش عوض می‌شود شتابش دو مؤلفه‌یِ مماس بر مسیر $a_\parallel$ و عمود $a_\perp$ بر آن دارد.

$$\begin{aligned}
&(T+\delta T)\cos\frac{\delta\theta}{2} - T\cos\frac{\delta\theta}{2} - \mu\,\delta N = \delta m\, a_\parallel \\
&\delta N - (T+\delta T)\sin\frac{\delta\theta}{2} - T\sin\frac{\delta\theta}{2} - \delta m\, g\cos\phi = \delta m\, a_\perp
\end{aligned} \tag{16}$$

در حدیِ‌که این عنصر خیلی کوچک باشد $\cos(\delta\theta/2)\approx 1$ و $\sin(\delta\theta/2)\approx\delta\theta/2$. در این تقریب ما از جمله‌هایی که رتبه‌یِ دو به بالا هستند چشم‌پوشی می‌کنیم، جمله‌هایی مثلِ $\delta\theta^2$، یا $\delta T\delta\theta$. پس

$$\begin{aligned}\delta T-\mu\,\delta N&=\delta m\,a_{\parallel}\\ \delta N-T\delta\theta-\delta m\,g\cos\phi&=\delta m\,a_{\perp}.\end{aligned}\tag{17}$$

حلِ این معادله‌ها کارِ ساده‌ای نیست. بیایید حالتِ ساده‌تری که جرمِ طناب خیلی کوچک و قابلِ چشم‌پوشی است را بررسی کنیم. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\delta T-\mu\,\delta N&=0\\ \delta N-T\delta\theta&=0.\end{aligned}\tag{18}$$

با حلِ این دو معادله نتیجه می‌شود

$$\delta T=\mu T\delta\theta.\tag{19}$$

در حالتِ خاصی که ضریبِ اصطکاکِ طناب با سطح ناچیز است $\delta T=0$، و کشش در همه‌یِ ریسمان برابر است.

با انتگرال گرفتن از (19) نتیجه می‌شود $T=T_0\exp(\mu\theta)$، که T_0 و T کششِ دو سرِ طناب و θ زاویه بینِ T و T_0 است. اگر طناب ساکن باشد، اصطکاک ایستایی است و $f_s\leq\mu_s N$. فرض کنید طنابی به دورِ استوانه‌ای به اندازه‌یِ θ چرخیده باشد. کششِ دو سرِ طناب T_1 و T_2 از رابطه‌یِ $T_2>T_1\exp(\mu\theta)$ به دست می‌آیند. شاید در فیلم‌هایِ وسترن دیده‌باشید که وقتی هفت‌تیرکش به شهر می‌رسد از اسب پیاده می‌شود و افسارِ اسب را چند دوری به دور یک پایه‌یِ چوبی می‌پیچد و می‌رود. کشش در طناب به طورِ نمایی تغییر می‌کند مثلاً اگر طناب دو دور پیچیده شده باشد و $\mu\approx 0.5$ باشد

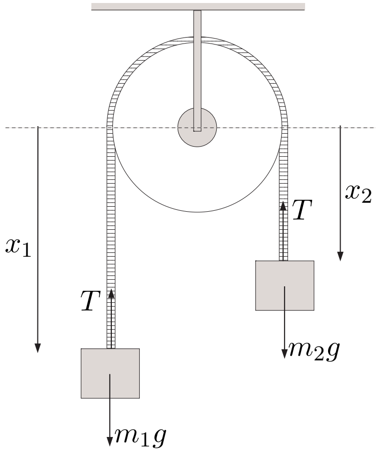
$$\frac{T_2}{T_1} = e^{2\pi} \approx 530 \tag{20}$$

کشش در یک طرف وزنِ همان تکه طنابی است که آویزان شده. بنا بر این کشش در دو دور می‌تواند تا 530 برابر شود. در چهار دور این ضریب تقریباً 300,000 است. اگر اسب طناب را محکم بکشد طناب باز نمی‌شود ولی ممکن است پایه‌یِ چوبی از بیخ کنده شود. شاید این مطلب هم توجهِ شما را جلب کرده باشد که چه‌طور یک کشتی‌یِ بسیار عظیم را با پیچاندنِ چند دور طناب به دورِ ستونی در نزدیکی‌یِ بارانداز نگه می‌دارند. گره‌زدنِ نیز یک مثالِ دیگر است. فرض کنید ریسمانی را به دورِ ستونی پیچانده‌ایم. وقتی این ریسمان را گره می‌زنیم همه‌یِ نقاطِ ریسمان با ستون و با بخش‌هایِ دیگرِ ریسمان در تماس قرار خواهند گرفت. در این حالت اندازه‌یِ θ در روابطِ بالا بزرگ‌تر خواهد شد.

- در طنابی که وزنِ طناب و اصطکاک نسبت به بقیه‌یِ نیروهایِ دخیل در مسئله قابلِ چشم‌پوشی باشند، کشش در همه‌جایِ طناب ثابت است.

- در صورتی که فقط وزنِ طناب ناچیز باشد، اگر اصطکاک وجود داشته باشد، هنوز ممکن است کشش در طناب تغییر کند. کشش در طناب با تغییرِ جهتِ آن به طورِ نمایی تغییر می‌کند: $T = T_0 \exp(\mu\theta)$.

مثالِ9) دو جرمِ m_1 و m_2 توسطِ نخی که از رویِ قرقره‌یِ ثابتی رد شده به هم وصل شده‌اند. شکلِ (۳–۹) را ببینید. اسمِ این دستگاه ماشینِ آتوود است. می‌خواهیم شتابِ جرم‌ها را به دست آوریم. بیایید از جرمِ نخ و اصطکاکِ بینِ نخ و قرقره چشم‌پوشی کنیم. چون اصطکاکی بینِ نخ و قرقره نیست، نیرویِ مماسی‌ای بینِ نخ و قرقره نیست که باعثِ چرخیدنِ قرقره شود. پس با این تقریب‌ها دیگر مهم نیست جرمِ قرقره چه‌قدر باشد. در ضمن نیرویِ کشش در همه‌جایِ نخ یکی است. در این مثال



شکل ۳—۹: شکلِ مربوط به مثالِ 9.

می‌خواهیم حرکتِ دو ذره را بررسی کنیم اما حرکتِ این دو ذره مستقل از هم نیست و یک قید بینِ مکان‌هایِ آن‌ها وجود دارد. مبدأ را مرکزِ قرقره و محورِ x را به سمتِ پایین می‌گیریم. طولِ نخ ثابت است. پس

$$x_1 + x_2 + \pi R = l, \tag{21}$$

که l طولِ نخ و R شعاعِ قرقره است. اگر از این رابطه دو بار مشتق بگیریم نتیجه می‌شود

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0. \tag{22}$$

قانونِ نیوتن را برایِ هریک از جرم ها می‌نویسیم

$$m_1 g - T = m_1 \ddot{x}_1,$$

$$m_2 g - T = m_2 \ddot{x}_2. \tag{23}$$

توجه کنید که‌علامت‌های مثبت یا منفیِ نیروها را با توجه به جهتِ مثبت که به سمتِ پایین گرفته‌ایم نوشته‌ایم. با استفاده از قیدِ (22) وحلِّ معادله‌هایِ بالا نتیجه می‌شود

$$\ddot{x}_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}, \quad T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}. \tag{24}$$

مثالِ10) ماشینِ آتوودِ مسئله‌یِ قبل را با شتابِ A بالا می‌بریم. می‌خواهیم شتابِ هر یک از جرم‌ها را به دست آوریم. شکلِ (۳—۱۰) را ببینید. این‌بار مبدأ ِمختصات را رویِ زمین و فاصله‌یِ جرم‌هایِ m_1، m_2 و مرکزِ قرقره تا زمین را به ترتیب x_1، x_2، و X نشان می‌دهیم. طولِ نخ ثابت است، پس

$$X - x_1 + X - x_2 + \pi R = l. \tag{25}$$

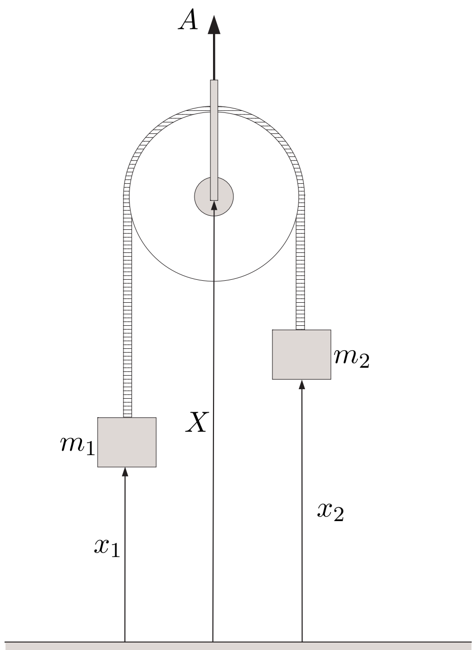
اگر از این رابطه دو بار مشتق بگیریم نتیجه می‌شود

$$2\ddot{X} - \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0 \tag{26}$$

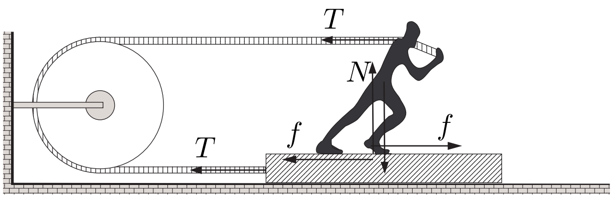
که $A = \ddot{X}$ شتابِ قرقره‌است. رابطه‌یِ (26) را به شکلِ

$$\ddot{x}'_1 + \ddot{x}'_2 = 0 \tag{27}$$

هم می‌توانیم بنویسیم که $\ddot{x}'_i := A - \ddot{x}_i$ شتابِ جرمِ m_i نسبت به قرقره است. دقت کنید که رابطه‌یِ (27) شبیهِ رابطه‌یِ (22) است. قانونِ نیوتن را برایِ هریک از جرم ها می‌نویسیم



شکل ۳—۱۰: شکلِ مربوط به مثالِ 10.



شکل ۳—۱۱:   شکلِ مربوط به مثالِ 11.

$$T - m_1 g = m_1 \ddot{x}_1,$$
$$T - m_2 g = m_2 \ddot{x}_2. \tag{28}$$

توجه کنید که‌علامت‌های مثبت یا منفیِ نیروها را با توجه به جهتِ مثبت که به سمتِ بالا گرفته‌ایم نوشته‌ایم. با استفاده از قیدِ (26) وحلِّ معادله‌هایِ بالا نتیجه می‌شود

$$\ddot{x}_1 = \frac{(m_2 - m_1)g + 2m_2 A}{m_1 + m_2},$$
$$\ddot{x}_2 = \frac{(m_1 - m_2)g + 2m_2 A}{m_1 + m_2},$$
$$T = \frac{2m_1 m_2 (g + A)}{m_1 + m_2}. \tag{29}$$

با توجه به این‌که کشش یک نیرویِ قیدی است تا وقتی که رابطه‌یِ قیدی برقرار باشد مقدارش مثبت است. اگر به علتی قید شکسته شودِ مثلاً نخ شُل یا پاره شود نیرویِ قیدی نیز صفر می‌شود.

مثالِ11) فردی به جرمِ m_1 رویِ جرمِ m_2 ایستاده است. ضریبِ اصطکاکِ بینِ m_2 و زمین را ناچیز می‌گیریم. ضریبِ اصطکاکِ بینِ پایِ این فرد و m_2، μ است. فرض

کنید همواره حداقل یکی از پاهایش رویِ m_2 است. شکلِ (۳−۱۱) را ببینید. ببینیم این فرد چه‌طور می‌تواند رویِ m_2 راه برود و آن را با طناب نیز بکشد. اصلاً آیا او می‌تواند طناب را بکشد؟

در صورتی که طناب کشیده باشد و طولِ نخ ثابت باشد، شتابِ جرم‌ها مقیدند، $a_2 + a_1 = 0$. قانونِ نیوتن برایِ این دستگاه عبارت است از

$$
\begin{aligned}
&f - T = m_1 a_1,\\
&-f - T = m_2 a_2,\\
&N - m_1 g = 0.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

با استفاده از معادله‌هایِ بالا و قیدِ بینِ شتاب‌ها، کششِ نخ و شتاب‌ها بر حسبِ f به دست می‌آیند

$$
\begin{aligned}
&a_1 = -a_2 = \frac{2f}{m_2 + m_1},\\
&T = f\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right).
\end{aligned}
\tag{31}
$$

اما چون در قدم برداشتن کفِ پا نسبت به سطحِ m_2 ساکن است، پس اصطکاک ایستایی است و $f \leq \mu N$. بیش‌ترین شتاب وقتی است که $f = \mu N$. از این‌جا

$$
\begin{aligned}
&a_{1,\max} = \frac{2\mu m_1 g}{m_2 + m_1},\\
&T = \mu m_1 g\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

اما این جواب به شرطی درست است که نخ شل نشود. اگر $m_2 < m_1$ باشد T ای که از رابطه‌یِ بالا به دست می‌آید منفی است که معنی ندارد زیرا طناب نمی‌تواند نیرویِ

فشاری را تحمل کند. پس در این حالت $T=0$، و قیدی نیز بینِ شتاب‌ها برقرار نیست. معادله‌هایِ نیوتن به صورتِ زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned} &f = m_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{f}{m_1},\\ &-f = m_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{f}{m_2},\\ &f \le \mu N = \mu m_1 g. \end{aligned} \tag{33}$$

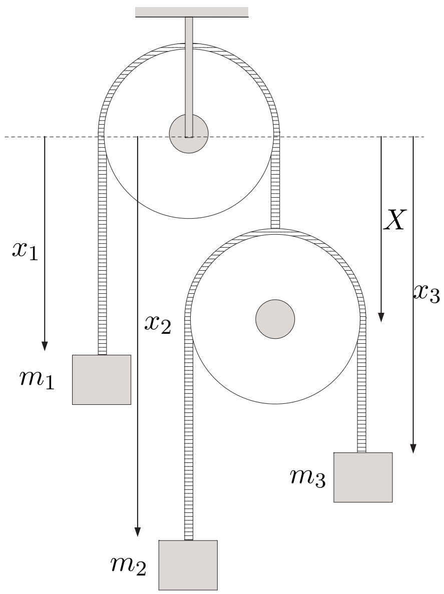
بیش‌ترین شتابی که فرد می‌تواند داشته باشد $a_{1,\max} = \mu g$ است. در این حالت اندازه‌یِ شتابِ m_2 نیز بیش‌ترین مقدار است.

$$|a_{2,\max}| = \frac{\mu m_1 g}{m_2} \tag{34}$$

مثالِ12) سه جرمِ m_1، m_2 و m_3 مطابقِ شکلِ (۳—۱۲) توسطِ دو قرقره‌یِ مشابه که یکی ساکن و دیگری متحرک و به جرمِ M است به هم وصل شده‌اند. از اصطکاکِ بین نخ و قرقره‌هاو هم‌چنین جرم نخ‌ها چشم‌پوشی می‌کنیم. می‌خواهیم شتابِ هر یک از جرم‌ها را به دست آوریم. در این مسئله به خاطرِ این‌که جرم‌ها توسطِ دو نخ به هم وصل شده‌اند، دو قید مربوط به ثابت‌بودنِ طولِ دو نخ وجود دارد. قیدها عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} &x_1 + (X - R) + \pi R = l_1, \quad \Rightarrow \quad a_1 + A = 0\\ &x_2 - X + x_3 - X + \pi R = l_2, \quad \Rightarrow \quad a_2 + a_3 - 2A = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

که a_i ها شتابِ جرم‌ها، A شتابِ قرقره‌یِ متحرک، l_i طولِ نخ‌ها و R شعاعِ قرقره‌ها است. کشش در نخِ اول را T_1 و کشش در نخِ دوم را T_2 می‌گیریم. قانونِ نیوتن می‌شود



شکل ۳—۱۲: شکلِ مربوط به مثالِ 12.

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1,$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2,$$
$$m_3 g - T_2 = m_3 a_3,$$
$$2T_2 + Mg - T_1 = MA. \tag{36}$$

معادله‌یِ آخر قانونِ نیوتن برایِ قرقره‌یِ متحرک است. نیروهایِ وارد بر آن وزنِ قرقره، دو نیرویِ کششی که توسطِ نخِ دو به آن وارد می‌شود و نیرویِ کششی است که توسطِ نخِ اول به آن وارد می‌شود. این چهار معادله هم‌راه با دو رابطه‌یِ قیدی بینِ شتاب‌ها شش معادله می‌شود که با استفاده از آن می‌توان شش مجهولِ a_1، a_2، a_3، A، T_1، و T_2 را به دست آورد.

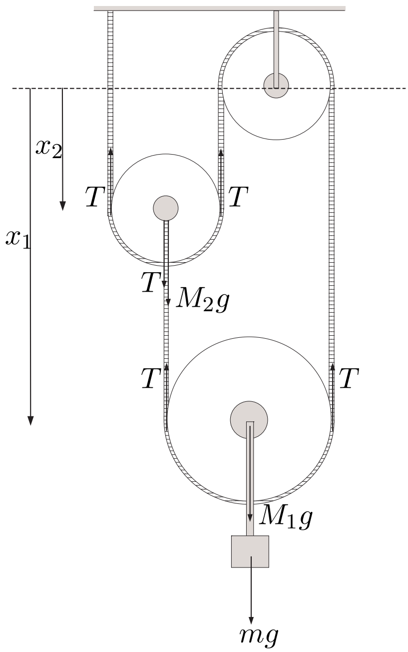
مثالِ13) با جرمِ m و دو قرقره‌یِ متحرک به جرم‌هایِ M_1 و M_2 و یک قرقره‌یِ ثابت دستگاهی مطابقِ شکلِ (۳—۱۳) ساخته‌ایم. بیابید شتابِ جرمِ m و قرقره‌ها را به دست آوریم. در این مسئله یک نخ و بنا بر این تنها یک رابطه‌یِ قیدی برایِ طولِ نخ داریم

$$x_2 + x_2 + x_1 + x_1 - x_2 = \text{ثابت}, \quad \Rightarrow \quad a_2 + 2a_1 = 0. \tag{37}$$

اگر از وزنِ نخ هم چشم‌پوشی کنیم نیرویِ کشش در همه‌جایِ نخ یک‌سان است. جرمِ m به قرقره‌یِ M_1 چسبیده و شتابِ‌شان یکی است. این مجموعه را می‌توانیم مثلِ یک جسم در نظر بگیریم. قانونِ نیوتن برایِ این مجموعه و قرقره‌یِ M_2 عبارت است از

$$mg + M_1 g - 2T = (m + M_1)a_1$$
$$M_2 g - T = M_2 a_2. \tag{38}$$

با استفاده از این دو معادله و قیدِ بینِ شتاب‌ها (37)، سه مجهولِ T، a_1 و a_2 به دست می‌آیند. حالتِ خاصی که جرمِ قرقره‌ها خیلی کوچک و قابلِ چشم‌پوشی باشد جالب



شکل ۳—۱۳:   شکلِ مربوط به مثالِ 13.

است. با فرضِ $M_1, M_2 \approx 0$ [5]، نتیجه می‌شود $T \approx 0$ و $a_1 \approx g$. در این حالتِ جرمِ m سقوطِ آزاد می‌کند.

۳—۵ نیرویِ فنر

کلی‌ترین نیرویِ تابعِ مکانِ یک‌بعدی را به صورتِ تابعی به صورتِ $F(x)$ در نظر بگیرید. x_0 را نقطه‌یِ تعادل بگیرید. در این صورت $F(x_0) = 0$. فرض کنید $F(x)$ در نزدیکی‌یِ این نقطه تابعی تحلیلی است . پس با بسطِ تیلورش برابر است. در این صورت بسطِ نیرو در نقاطِ خیلی نزدیک به x_0 عبارت است از

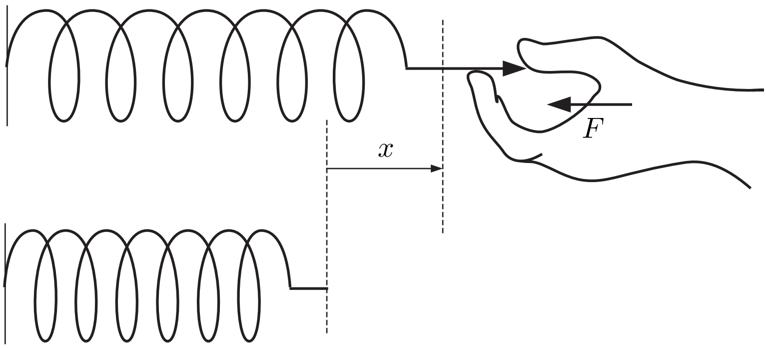
$$F(x) \approx C(x - x_0). \tag{39}$$

در این‌جا فرض کرده‌ایم $C \neq 0$، و از جمله‌هایِ رتبه‌یِ دو و بالاترِ $x - x_0$ چشم‌پوشی کرده‌ایم[6] و $C := (\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x})|_{x=x_0}$ است. اگر x_0 نقطه‌یِ تعادلِ پای‌دار باشد با منحرف کردنِ ذره از x_0 انتظار داریم ذره به x_0 برگردد. در این حالت C یک ثابتِ منفی است، که آن را با $-k$ نشان می‌دهیم، $F(x) = -k(x - x_0)$. نیرویی که یک فنرِ آرمانی در انتهایِ آزادش وارد می‌کند چنین نیرویی است، یعنی اگر بخواهیم انتهایِ آزادِ یک فنرِ آرمانی را به اندازه‌یِ x جابه‌جا کنیم باید نیرویِ kx به آن وارد کنیم و نیرویی که فنر در این وضعیت به دستِ ما وارد می کند طبقِ قانونِ سومِ نیوتن $F = -kx$ است. علامتِ منفی در رابطه‌یِ نیرو به این خاطر است که فنر نیرویی در خلافِ جهتِ محورِ x وارد می‌کند. شکلِ (۳—۱۴) را ببینید. در واقع هر نیرویِ تابعِ مکانی در نزدیکی‌یِ

---

[5] چون M_1 و M_2 بُعد دارند به‌تر است بنویسیم $M_1/m \approx 0$ و $M_2/m \approx 0$.

[6] ممکن است جمله‌یِ رتبه یک در بسطِ تیلور صفر باشد. در این صورت بسطِ تیلور از جمله‌یِ بعد شروع می‌شود.

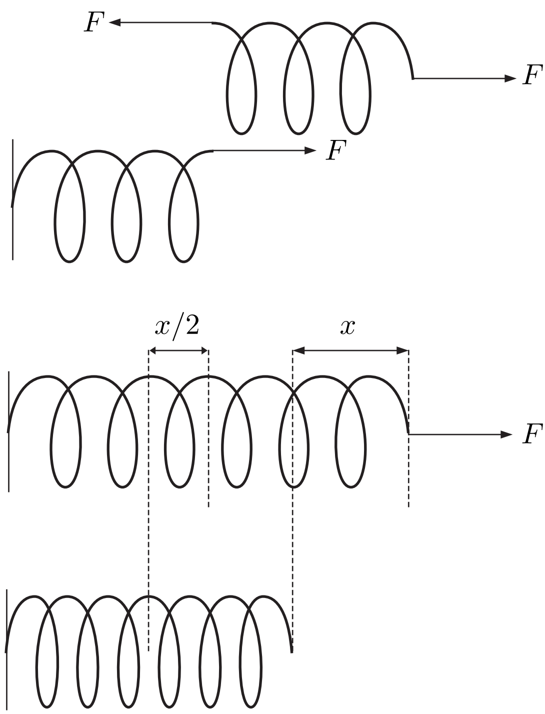


شکل ۳—۱۴: وقتی یک فنرِ آرمانی را به اندازه‌یِ x می‌کشیم، نیرویی متناسب با x به دستِ ما وارد می‌کند.

نقطه‌یِ تعادل[7] مثلِ نیرویِ یک فنرِ آرمانی رفتار می‌کند. به ثابتِ k ضریبِ سختی‌یِ فنر گفته می‌شود و هر چه k بزرگ‌تر باشد کشیدنِ فنر به اندازه‌یِ یک طولِ معین سخت‌تر است. بُعدِ ضریبِ سختی‌یِ فنر MT^{-2} است.

یکی دیگر از ویژگی‌هایی که برایِ فنرِ آرمانی قائلیم این است که اگر سرِ آزادِ آن را بکشیم همه‌جایِ فنر یک‌سان کشیده می‌شود، مثلاً اگر طولِ فنرِ کشیده نشده l_0 باشد و سرِ آن را به اندازه‌یِ x بکشیم وسطِ فنر به اندازه‌یِ $x/2$ و جایی از فنر که قبلاً در l_0/α اُم بود به اندازه‌یِ x/α اُم کشیده می‌شود. پس اگر فنر را نصف کنیم مثلِ آن است که تحتِ تأثیرِ نیرویِ F، کشیدگی‌اش نصف شده است. بنا بر این اگر فنری با ضریبِ سختی‌یِ k را نصف کنیم، ضریبِ سختی‌اش $2k$ می‌شود. اگر دو فنرِ یک‌سان با ضریبِ سختی‌یِ k را به هم ببندیم، فنری ساخته می‌شود که ضریبِ سختی‌اش $k/2$ است. شکلِ (۳—۱۵) را ببینید.

[7] به شرطی که تابعِ نیرو در نزدیکی‌یِ نقطه‌یِ تعادل بسطِ تیلور داشته باشد و مشتقِ نیرو در نقطه‌یِ تعادل هم صفر نباشد.



شکل ۳—۱۵:   اگر فنری را نصف کنیم ضریبِ سختی‌یِ آن دو برابر می‌شود.

اگر جسمی به جرمِ m را به این فنر ببندیم و آن را به اندازه‌یِ طولِ l بکشیم و سپس رها کنیم، جرمِ m شروع به نوسان می‌کند. فرض کنید جرمِ فنر نسبت به m ناچیز است. اگر اصطکاکِ بینِ سطحِ و جرمِ m ناچیز باشد این نوسان تا مدتِ زیادی ادامه دارد. به l دامنه‌یِ نوسان می‌گوییم. دوره‌یِ نوسان زمانی است که جسم یک نوسان انجام می‌دهد. دوره‌یِ نوسان را با T نشان می‌دهیم. با T، k و m می‌توانیم یک کمیتِ بی‌بُعد بسازیم. این کمیت $\frac{kT^2}{m}$ است. پس

$$T = C\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{40}$$

C ثابتی بی‌بُعد است که تحلیلِ ابعادی نمی‌تواند آن را تعیین کند. بیایید مسئله را به صورتِ تحلیلی حل کنیم. قانونِ نیوتن برایِ جرمِ m عبارت است از

$$m\ddot{x} = -kx, \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x. \tag{41}$$

که $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$ است. ما هنوز حلِّ معادلاتِ دیفرانسیل را بلد نیستیم، اما شاید بتوانیم جواب را حدس بزنیم. x باید آن‌چنان تابعی از زمان باشد که با دو بار مشتق گیری متناسب با خودش و با ضریبِ منفی شود. تابع $\sin$ و $\cos$ چنین خاصیتی دارند. کلی‌ترین جوابی که برایِ این معادله می‌توانیم پیدا کنیم $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ است. این جواب تابعی دوره‌ای با دوره‌یِ $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است. سرعتِ ذره عبارت است از

$$v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t). \tag{42}$$

برایِ آن‌که ثابت‌هایِ A، و B را به دست آوریم باید شرایطِ اولیه یعنی مکانِ اولیه، x_0، و سرعتِ اولیه‌یِ جرمِ m، v_0 را داشته باشیم. فرض کنید فنر را به اندازه‌یِ ℓ بکشیم و سپس رها کنیم، $x_0 = \ell$ و $v_0 = 0$ است در این صورت

$$\ell = A,$$
$$0 = B\omega. \tag{43}$$

با جاگذاریِ این‌ها

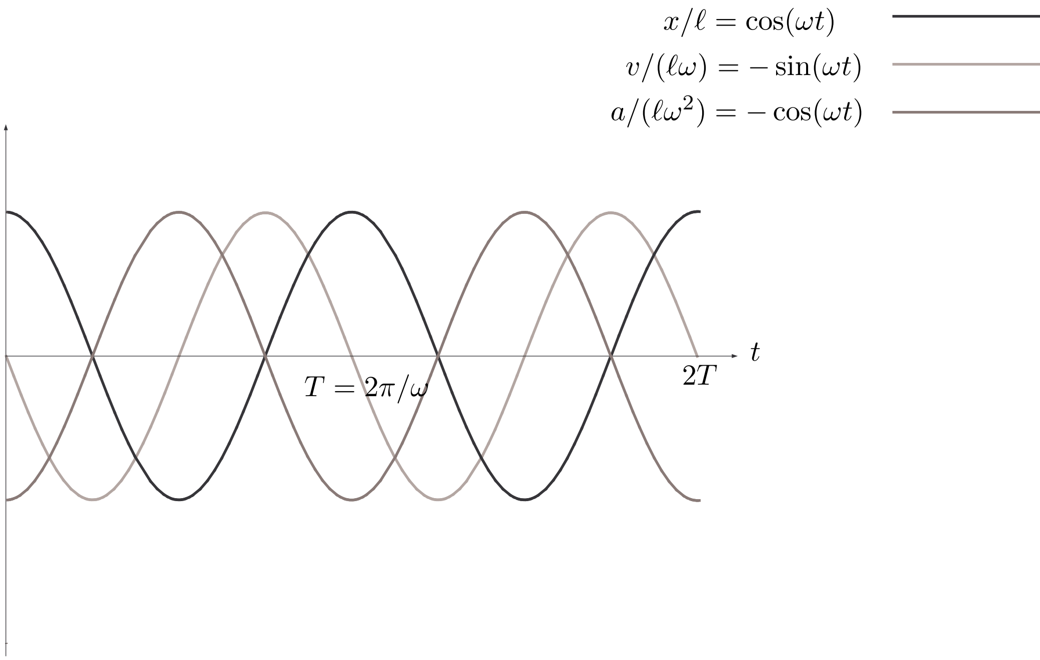
$$x = \ell \cos(\omega t),$$
$$v = -\ell\omega \sin(\omega t). \tag{44}$$

در شکلِ (۳—۱۶) منحنی‌یِ مکان، سرعت و شتاب بر حسبِ زمان رسم شده‌اند. به این دستگاه نوسان‌گرِ هم‌آهنگ گفته می‌شود.

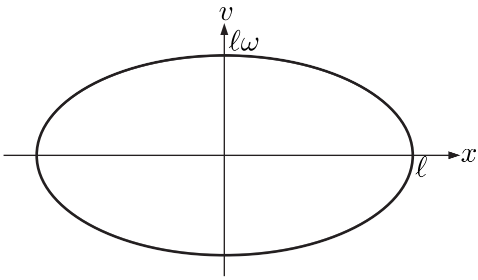
وقتی که کشیدگی‌یِ فنر صفر است، نیرویِ فنر و شتابِ جسم صفر هستند. وقتی فنر کشیده می‌شود به‌تدریج سرعتِ جسم کوچک می‌شود تا جایی که وقتی فنر به بیش‌ترین کشیدگی رسید سرعتِ جسم صفر می‌شود. اما در این حالت نیرویِ فنر بزرگ‌ترین مقدار است. با حذفِ زمان بینِ x و v به رابطه‌یِ زیر می‌رسیم.

$$\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{v^2}{\ell^2\omega^2} = 1 \tag{45}$$

این معادله‌یِ یک بیضی است. شکلِ (۳—۱۷) را ببینید. همان‌طور که در بخشِ (۲—۱—۲) دیدیم، شتابِ ذره $a = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ است. در نقاطی که $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$ شتابِ ذره صفر و ذره در تعادل است. در ربعِ دوم و چهارم (شکلِ (۳—۱۷)) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} > 0$ است و بنابراین حرکت تندشونده است. در ربعِ اول و سوم $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} < 0$ است و حرکت کندشونده است. در جاهایی که اندازه‌یِ سرعت بیش‌ترین مقدار است، $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$ و شتاب صفر است. توجه داشته‌باشیم که در $x = \pm\ell$، $v = 0$ است، ولی شتابِ ذره صفر نیست زیرا در این نقاط $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ بی‌نهایت است. برایِ این‌که این را دقیق‌تر ببینیم، v را به عنوانِ تابعی از x به دست می‌آوریم.



شکل ۳—۱۶: نمودارهایِ مکان، سرعت، و شتابِ یک نوسان‌گر بر حسبِ زمان. برایِ آن‌که هر سه نمودار را یک‌جا داشته باشیم کمیت‌هایِ بی‌بعدِ x/ℓ، $v/(\ell\omega)$، و $a/(\ell\omega^2)$ را بر حسبِ زمان کشیده‌ایم.



شکل ۳—۱۷: خمِ سرعت بر حسبِ مکانِ یک نوسان‌گر.

$$v = \pm\omega\sqrt{\ell^2 - x^2}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mp\frac{\omega\ x}{\sqrt{\ell^2 - x^2}}. \tag{46}$$

همان‌طور که انتظار داریم

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\omega^2 x. \tag{47}$$

۳–٦ حرکتِ دایره‌ای

در بخشِ (۲–۲–۴) سینماتیکِ حرکتِ دایره‌ایِ یک‌نواخت را بررسی کردیم. در این بخش می‌خواهیم دینامیکِ حرکتِ دایره‌ای را بررسی کنیم. شتابِ ذره‌ای که رویِ دایره‌ای به شعاعِ R با سرعتِ زاویه‌ایِ ثابتِ ω حرکت می‌کند، $\mathbf{a} = -R\omega^2\mathbf{e}_r$ است. بنا بر این لازم است برایِ آن‌که ذره رویِ دایره‌ای با سرعتِ یک‌نواخت حرکت کند نیرویی شعاعی، و مرکزگرا به ذره وارد شود.

مثالِ14) زمین در مداری تقریباً دایره‌ای به دورِ خورشید می‌چرخد. سرعتِ زاویه‌ایِ گردشِ زمین به دورِ خورشید نیز تقریباً ثابت است. نیرویِ گرانش که از طرفِ خورشید به زمین وارد می‌شود نیرویِ مرکزگرایِ لازم برایِ حرکتِ دایره‌ایِ زمین به دورِ خورشید را فراهم می‌کند. این نیرو $\mathbf{F} = -\dfrac{GmM_\odot}{r^2}\,\mathbf{e}_r$ است که $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s}^2)$ ثابتِ جهانیِ گرانش، $M_\odot$ جرمِ خورشید، و m جرمِ زمین، و r فاصله‌یِ زمین و خورشید است. این مسئله علی‌الاصول دو ذره‌ای است، اما با توجه به این‌که خورشید خیلی سنگین‌تر از زمین و عملاً جابه‌جایی‌اش کوچک است، از حرکتِ آن صرفِ نظر می‌کنیم و در نتیجه مسئله تبدیل به یک مسئله‌یِ تک‌ذره‌ای می‌شود. کافی است قانونِ نیوتن را برایِ زمین بنویسیم

$$-\frac{GmM_\odot}{r^2}\,\mathbf{e}_r=-mr\omega^2\,\mathbf{e}_r\quad\Rightarrow\quad\omega=\sqrt{\frac{GM_\odot}{r^3}}\tag{48}$$

سرعتِ زمین به دورِ خورشید هم بر حسبِ شعاعِ مدارِ زمین به دست می‌آید

$$v=r\omega=\sqrt{\frac{GM_\odot}{r}}.\tag{49}$$

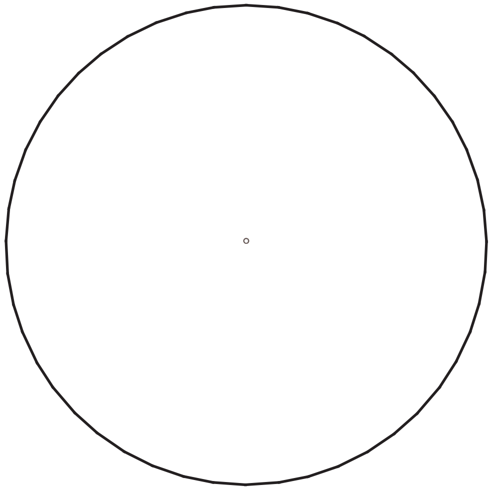
اما واقعاً نیرویِ گرانشِ زمین و خورشید دقیقاً با $mr\omega^2$ یا mv^2/r برابر نیست، بنابراین زمین رویِ مسیری دایره‌ای به دورِ خورشید حرکت نمی‌کند بل‌که مسیرش بیضی است. اما انحرافِ مدارِ زمین از مدارِ دایره‌ای بسیار کوچک است. پارامتری که معرفِ اندازه‌یِ انحرافِ بیضی از دایره است، پارامترِ خروج از مرکز، e، است. برایِ یک بیضی با دو نیم قطرِ a، و $b\le a$، خروج از مرکز با رابطه‌یِ زیر تعریف می‌شود.

$$e:=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.\tag{50}$$

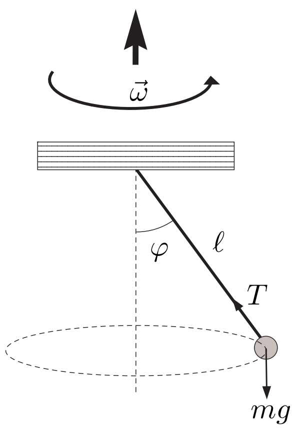
حالتِ خاصِ $a=b$، متناظر با $e=0$ و دایره است. خروج از مرکزِ یک بیضی‌یِ خیلی کشیده نزدیک به یک است. خروج از مرکزِ مدارِ زمین $e=0.017$ است. در شکلِ (۳—۱۸) مدارِ زمین رسم شده است. همان‌طور که می‌بینید اصلاً واضح نیست که این شکل دایره نیست. در واقع با دقتِ بسیار خوبی مدارِ زمین به دایره نزدیک است.

مطابقِ شکلِ (۳—۱۹)، گلوله‌ای به جرمِ m توسطِ ریسمانی به طولِ ℓ از نقطه‌یِ ثابتی در سقف آویزان شده. حالتی را در نظر بگیرید که گلوله رویِ دایره‌ای افقی با سرعتِ زاویه‌ایِ ثابتِ ω حرکت کند. به این دستگاه آونگِ مخروطی می‌گوییم. جمعِ نیروها در راستایِ قائم باید صفر باشد.

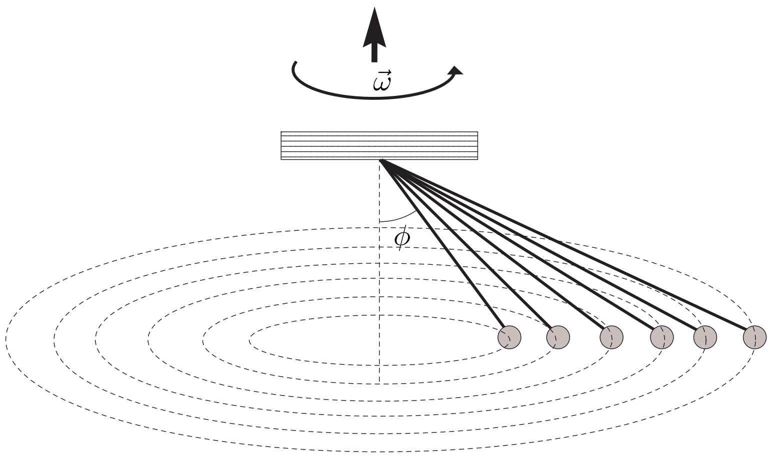
$$T\cos\varphi-mg=0.\tag{51}$$



شکل ۳—۱۸: مدارِ زمین به دورِ خورشید. این مدار یک بیضی با خروج از مرکزِ $e = 0.017$ است. همان‌طور که می‌بینید بدونِ اندازه‌گیری‌یِ دقیق اصلاً معلوم نیست که این مدار با دایره فرق دارد.



شکل ۳—۱۹: آونگِ مخروطی.



شکل ۳—۲۰: آونگ‌هایِ مخروطی با سرعتِ زاویه‌ایِ یک‌سان در یک ارتفاع می‌چرخند.

m رویِ دایره‌ای به شعاعِ $r = \ell \sin\varphi$ حرکت کند. قانونِ نیوتن در راستایِ شعاعی عبارت است از

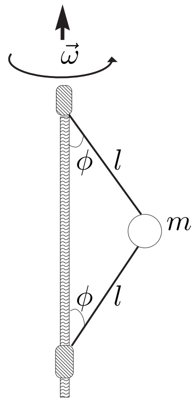
$$-T\sin\varphi = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mr\dot{\theta}^2, \tag{52}$$

که شتابِ شعاعی $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ است و از ثابت‌بودنِ r نتیجه شده است $\ddot{r} = 0$. با جایگذاریِ $r = l\sin\varphi$ و $\dot{\theta} = \omega$ و استفاده از (51) به رابطه‌یِ زیر می‌رسیم

$$\ell\cos\varphi = \frac{g}{\omega^2}. \tag{53}$$

هر چه ω بزرگ‌تر شود آونگ در سطحِ بالاتری می‌چرخد. در حدِ $\omega \to \infty$، $\varphi \to \pi/2$. $\ell\cos\varphi$ فاصله‌یِ آونگ از سقف است. می‌بینیم که این فاصله به ω بستگی دارد ولی مستقل از جرمِ گلوله و طولِ آونگ است. بنا بر این اگر تعدادِ زیادی آونگ با طول‌های مختلف و گلوله‌هایِ متفاوت را با سرعتِ زاویه‌ایِ یک‌سان بچرخانیم همه در ارتفاعِ یک‌سانی از سقف دوران می‌کنند. شکلِ (۳—۱۹) را ببینید.

مثالِ15) ذره‌ای به جرمِ m مطابقِ شکلِ (۳—۲۰) توسط دو نخ به طولِ l به یک محور وصل شده است. محور و جرمِ m با سرعتِ زاویه‌ایِ ω دوران می‌کنند. به



شکل ۳—۲۱: شکلِ مربوط به مثالِ 15.

ازایِ چه مقادیری از سرعتِ زاویه‌ایِ ω، نخِ پایینی شُل می‌شود؟

برایِ آن که نخ شُل نشود، m باید رویِ دایره‌ای به شعاعِ $r = l\sin\phi$ حرکت کند. ϕ نیز باید ثابت بماند. کششِ نخِ پایینی T_1 و کششِ نخِ بالایی را T_2 بگیرید. جمعِ نیروها در راستایِ قائم باید صفر باشد.

$$T_2\cos\phi - mg - T_1\cos\phi = 0. \tag{54}$$

قانونِ نیوتن در راستایِ شعاعی عبارت است از

$$-T_2\sin\phi - T_1\sin\phi = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \tag{55}$$

که با جایگذاریِ $r = l\sin\phi$ و $\dot{\theta} = \omega$ به رابطه‌یِ زیر می‌رسیم.

$$T_2\sin\phi + T_1\sin\phi = ml\sin\phi\,\omega^2. \tag{56}$$

با استفاده از این روابط کششِ نخِ پایینی، T_1، به دست می آید.

$$T_1 = \frac{m}{2}(l\omega^2 - \frac{g}{\cos\phi}). \tag{57}$$

برایِ آن که نخ شُل نشود باید $T_1 \geq 0$ باشد، پس اگر تعریف کنیم

$$\omega_c := \sqrt{\frac{g}{l\cos\phi}}, \tag{58}$$

می‌بینیم که به ازایِ سرعتِ زاویه‌ای‌هایِ کوچک‌تر از ω_c نخ شُل می‌شود.

حالا بیایید یک مسئله را هم به روشِ تحلیلِ ابعادی و هم با استفاده از قوانینِ نیوتن حل کنیم.

مثالِ16) می‌خواهیم پریودِ نوسانِ یک آونگِ ساده را به دست آوریم. کمیت‌هایِ دخیل در مسئله به جز پریودِ آونگ، τ، احتمالاً جرمِ آونگ m، طولِ آونگ l، ثابتِ گرانش g و دامنه‌یِ اولیه‌یِ آونگ θ_0 است. $\Pi_1 = \theta_0$ بی‌بُعد است. پس کافی است که با τ، m، l و g کمیت یا کمیت‌هایِ بی‌بُعد دیگری بسازیم.

$$\Pi_2 = m^\alpha g^\beta l^\gamma \tau^\delta. \tag{59}$$

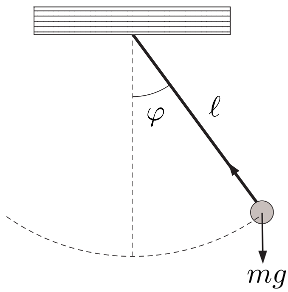
بنا بر این

$$[\Pi_2] = M^\alpha (LT^{-2})^\beta L^\gamma T^\delta \tag{60}$$

باید بی‌بُعد باشد. پس

$$\alpha = 0, \quad \gamma = -\beta, \quad \delta = 2\beta. \tag{61}$$

یعنی کمیتِ $(\frac{g\tau^2}{l})^\beta$ یا $\frac{g\tau^2}{l}$ بی‌بُعد است. در این مثال دو کمیتِ بی‌بُعدِ مستقلِ θ_0 و $\frac{g\tau^2}{l}$ را داریم. پس



شکل ۳—۲۲: آونگِ ساده.

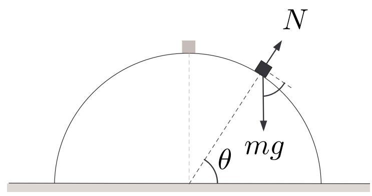
$$\frac{g\tau^2}{l} = f(\theta_0) \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{lf(\theta_0)}{g}}. \tag{62}$$

اگر دامنه‌یِ نوسان یعنی θ_0 خیلی کوچک باشد به طوری‌که $f(\theta_0) \approx f(0)$ باشد

$$\tau = C\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad C := \sqrt{f(0)}. \tag{63}$$

C ثابت و بی‌بُعد است. تحلیلِ ابعادی هیچ اطلاعی در موردِ مقدارِ C نمی‌دهد، ولی با محاسبه‌یِ مستقیم مقدارِ آن به دست می‌آید ($C = 2\pi$). حالا بیایید همین مسئله را به طورِ تحلیلی حل کنیم. مطابقِ شکلِ (۳—۲۲) گلوله‌ای به جرمِ m توسطِ ریسمانی به طولِ ℓ از نقطه‌یِ ثابتی در سقف آویزان شده. آونگ را به اندازه‌یِ φ_0 از حالتِ قائم خارج کرده و سپس رها می‌کنیم. گلوله رویِ کمانی از دایره به شعاعِ ℓ حرکت می‌کند. قانونِ نیوتن در راستاهایِ شعاعی، r، و مماسی، θ، به صورتِ زیر اند

$$-T + mg\cos\varphi = -m\ell\dot{\varphi}^2,$$
$$-mg\sin\varphi = m\ell\ddot{\varphi}. \tag{64}$$



شکل ۳—۲۳: شکلِ مربوط به مثالِ 17.

توجه دارید که علامتِ منفیِ مؤلفه‌یِ $mg\sin\varphi$ به این خاطر است که این مؤلفه در جهتِ کم کردنِ φ است. معادله‌یِ دومِ (64) یک معادله‌یِ دیفرانسیل است که اگر می‌توانستیم آن را حل کنیم φ بر حسبِ t به دست می‌آمد. اگر دامنه‌یِ اولیه‌یِ آونگ φ_0 خیلی کوچک باشد یعنی مقدارِ آن بر حسبِ رادیان $\varphi_0 \ll 1$ باشد می‌توانیم از بسطِ $\varphi \approx \sin\varphi$ استفاده کنیم. در این صورت معادله‌یِ دیفرانسیلِ بالا خیلی ساده می‌شود

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \varphi_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t). \qquad (65)$$

از این‌جا دوره‌یِ نوسانِ آونگ $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ می‌شود.

مثالِ17) جسمِ کوچکی در بالاترین نقطه‌ای نیم‌کره‌یِ ثابتی ساکن است. شکلِ (۳—۲۳) را ببینید. تعادلِ ذره در این حالت ناپای‌دار است. با اختلالِ کوچکی که هم‌واره در محیط وجود دارد جسم رویِ نیم‌کره می‌لغزد و پایین می‌آید. اصطکاکِ بینِ جسم و سطحِ نیم‌کره را ناچیز می‌گیریم. در حینِ پایین آمدن، جسم از سطحِ نیم‌کره جدا می‌شود. می‌خواهیم جایی که جسم از نیم‌کره جدا می‌شود را به دست آوریم.

وقتی که جسم از بالایِ نیم‌کره لیز می‌خورد سرعتِ اولیه‌یِ کوچکی دارد. این سرعت، نیرویِ وزن و نیرویِ عمودی‌یِ سطح همه در یک صفحه‌اند. چون در لحظه‌یِ اول هم سرعت و هم شتابِ جسم در یک صفحه‌اند، سرعتِ جسم در لحظه‌یِ

بعد هم در همین صفحه است. پس حرکتِ جسم در همین صفحه که صفحه‌یِ حرکت است می‌ماند و حرکت علی‌الاصول دوبُعدی است. قوانینِ نیوتن برایِ حرکت جسم عبارت اند از

$$N - mg\sin\theta = -m\frac{v^2}{R},$$

$$-mg\cos\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \qquad (66)$$

از رابطه‌یِ اول N بر حسبِ v و θ به دست می‌آیند. در معادله‌یِ دوم هم v و هم θ تابعِ زمان‌اند. جایی که جسم از سطح جدا می‌شود جایی است که $N = 0$ است. سرعتِ جسم در زمانِ جداشدن از سطح را v_1 و زاویه را θ_1 بگیرید. در این صورت از معادله‌یِ اولِ (66) داریم

$$v_1^2 = gR\sin\theta_1. \qquad (67)$$

بیایید ببینیم قوانینِ نیوتن در چارچوبِ دکارتی چه اطلاعاتی به ما می‌دهد.

$$N\cos\theta = m\ddot{x},$$

$$N\sin\theta - mg = m\ddot{y}. \qquad (68)$$

از معادله‌یِ اولِ (68) می‌بینیم که لحظه‌ای که جسم در بالاترین نقطه است، یعنی $\theta = \pi/2$ و همین‌طور زمانِ جداشدنِ جسم که $N = 0$ است $\ddot{x} = 0$. در این‌جاها شتابِ جسم عمودی است. اما در بقیه‌یِ نقاط حرکتِ جسم شتاب‌دار است و هر دو مؤلفه‌یِ شتاب غیرِصفراند. برایِ آن‌که θ_1 را به دست آوریم لازم است که از رابطه‌یِ بینِ سرعت و $\dot{\theta}$، یعنی $v = R\dot{\theta}$، استفاده کنیم. رابطه‌یِ دومِ (66) به صورتِ زیر در می آید

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\cos\theta. \tag{69}$$

به یک معادله‌یِ دیفرانسیل برایِ θ رسیدیم. برایِ حلِ این معادله کافی است که دو طرفِ آن را در $\dot{\theta}$ ضرب کنیم

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\dot{\theta}\cos\theta = 0 \qquad \text{یا} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{R}\sin\theta\right) = 0. \tag{70}$$

با این روش ما کمیتی به دست آوردیم که علی‌الاصول هم به مکان و هم به سرعتِ ذره بستگی دارد ولی در کلِ حرکت مقدارش ثابت است. در آینده خواهیم دید چیزی که به دست آوردیم متناسب با انرژی است. در هر صورت

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{R}\sin\theta = \text{ثابت} = \frac{g}{R}. \tag{71}$$

مقدارِ ثابت را از اطلاعاتِ ابتدایِ حرکت به دست می‌آوریم. در ابتدایِ حرکت $\theta = \pi/2$ و $\dot{\theta} \approx 0$. پس این کمیت برایِ زمانِ جدا شدن عبارت است از

$$\frac{\dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{g}{R}\sin\theta_1 = \frac{g}{R} \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = 2gR(1-\sin\theta_1). \tag{72}$$

از ترکیبِ این معادله و (67) نتیجه می‌شود

$$\sin\theta_1 = \frac{2}{3}. \tag{73}$$

پس جسم در $2/3$ ارتفاعِ اولیه از سطحِ نیم‌کره جدا می‌شود. با استفاده از رابطه‌یِ اولِ (66) و (71) می‌توانیم $N(\theta)$ را به دست آوریم.

$$N(\theta) = mg(3\sin\theta - 2). \tag{74}$$

شتابِ ذره در لحظه يِ جداشدن چه‌قدر است؟ پس از جداشدن شتابِ ذره چه‌قدر است؟ به عنوانِ تمرین نمودارِ اندازه‌يِ شتابِ ذره بر حسبِ θ را رسم کنید.

۳—۷ قانونِ نیوتن در چارچوبِ غیرِلخت

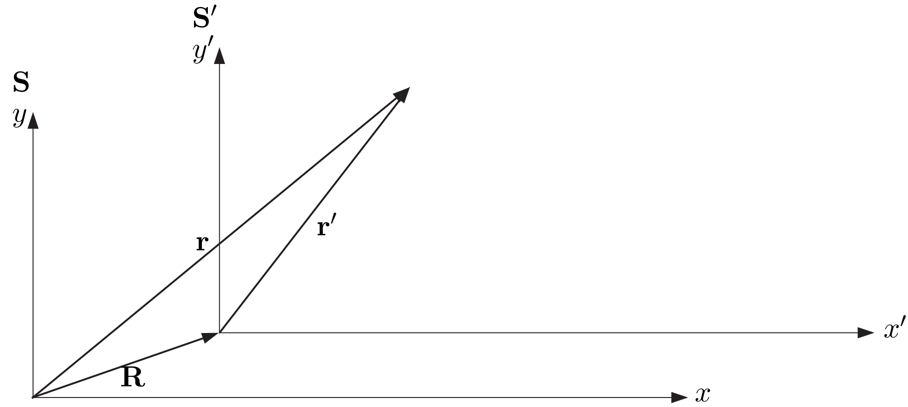
دیدیم که بخشی از آن‌چه قانونِ اولِ نیوتن نامیده می‌شود، تعریف چارچوبِ لخت است. چارچوبِ لخت، چارچوبی است که قانونِ اولِ نیوتن در آن صدق می‌کند. در چارچوب‌هایِ غیرِلخت سرعتِ ذره‌يِ آزاد ثابت نیست؛ در چارچوب‌هایِ غیرِلخت ذره‌ای که تحتِ تأثیرِ نیرویی نیست، حرکتش شتاب‌دار است. بیایید قانونِ دومِ نیوتن را در یک چارچوبِ غیرِلخت بررسی کنیم. شکلِ (۳—۲۴) را ببینید. چارچوبِ غیرِلختِ S' با شتابِ $\mathbf{A}$ نسبت به چارچوبِ لختِ S در حرکتِ انتقالی است. بردارِ مکانِ ذره‌ای به جرمِ m، در این دو چارچوب $\mathbf{r}$، و $\mathbf{r}'$ است. شتابِ ذره نسبت به دو چارچوب را $\mathbf{a}$، و $\mathbf{a}'$ بگیرید. در این‌صورت

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}'. \tag{75}$$

فرض کنید به جرمِ m نیرویِ $\mathbf{F}$ وارد می‌شود. پس $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ است. با استفاده از (75) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A} = m\mathbf{a}'. \tag{76}$$

همین‌طور که می‌بینیم برایِ آن‌که در چارچوب غیرِلخت قانونِ دومِ نیوتن معتبر باشد باید علاوه بر نیروهایِ واقعی جمله‌ی اضافی‌ی $-m\mathbf{A}$ را هم در نظر بگیریم. به این جمله‌يِ اضافی که بُعدِ نیرو دارد گاهی نیرویِ مجازی یا نیروی لختی گفته می‌شود.



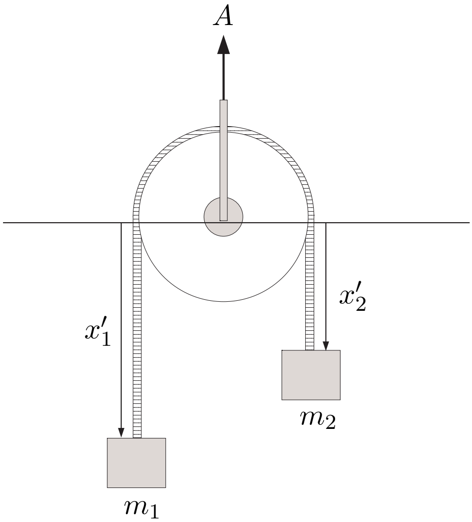
شکل ۳–۲۴:   حرکتِ نسبیِ چارچوبِ غیرِلخت S' نسبت به چارچوبِ لختِ S.

توجه داریم که نیرویِ مجازی ناشی از برهم‌کنشِ جسم با محیط نیست بل‌که فقط ناشی از این است که چارچوبِ انتخابیِ ما غیرِلخت است و برایِ استفاده از قانونِ نیوتن باید جمله‌ی تصحیحیِ $-m\mathbf{A}$ را به آن اضافه کنیم. این جمله بخشی از جمله‌یِ جرم ضرب‌در شتاب بود که به سمتِ چپ آورده شده.

مثالِ18) ماشینِ آتوودی که با شتابِ A بالا برده می‌شود را قبلاً در چارچوبِ لخت حل کردیم. حالا می‌خواهیم همین مسئله را از دیدِ چارچوبِ غیرِلخت حل کنیم. در چارچوبِ غیرِلختی که هم‌راهِ قرقره با شتابِ A بالا می‌رود، مسئله شبیه ماشینِ آتوودِ معمولی است با این تفاوت که علاوه بر نیروهایِ وزن و کششِ نخ، دو نیرویِ مجازیِ $-m_1\mathbf{A}$ و $-m_2\mathbf{A}$ به دو جرم وارد می‌شوند. در این چارچوبِ غیرِلخت رابطه‌یِ بینِ شتابِ دو جسم به صورتِ زیر است

$$\ddot{x}'_1 + \ddot{x}'_2 = 0 \qquad (77)$$

در نوشتنِ قانونِ نیوتن باید نیروهایِ مجازی را نیز در نظر بگیریم



شکل ۳—۲۵: شکلِ مربوط به مثالِ 18.

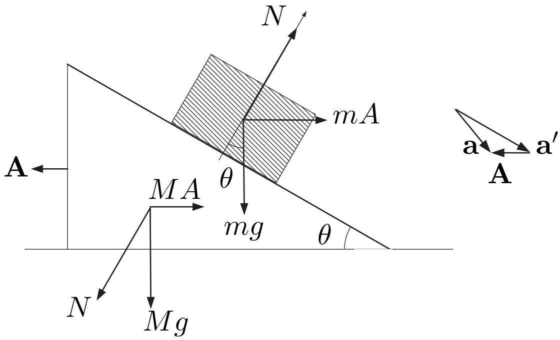
$$
\begin{aligned}
T - m_1 g - m_1 A &= m_1 \ddot{x}'_1, \\
T - m_2 g - m_2 A &= m_2 \ddot{x}'_2.
\end{aligned} \tag{78}
$$

این معادلات شبیهِ معادلاتِ مربوط به ماشینِ آتوودِ عادی است با این تفاوت که مثلاً برایِ m_1 نیرویِ وزن به جای $m_1 g$، $m_1(g+A)$ باشد. در این صورت می‌توانیم از (24) استفاده کنیم.

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}'_1 &= \frac{(m_1 - m_2)(g+A)}{m_1 + m_2}, \\
T &= \frac{2 m_1 m_2 (g+A)}{m_1 + m_2}.
\end{aligned} \tag{79}
$$

شتابِ m_1 از دیدِ چارچوبِ لخت، a عبارت است از

$$
\mathbf{a} \quad = \quad \mathbf{A} + \mathbf{a}' = \mathbf{i}A - \mathbf{i}\ddot{x}'_1
$$



شکلِ ۳—۲۶: شکلِ مربوط به مثالِ 19.

$$
\begin{aligned}
a &= A - \ddot{x}_1' = A - \frac{(m_1 - m_2)(g + A)}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{2m_2 A + (m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} \qquad (80)
\end{aligned}
$$

در این مثال شتابِ چارچوبِ غیرِلخت و شتابِ جسم در یک راستا بودند و مسئله یک‌بعدی بود. بیایید یک مثالِ دوبعدی را بررسی کنیم.

مثالِ19) مطابقِ شکلِ (۳—۲۶)، جسمی به جرمِ m رویِ سطحِ شیب‌داری به جرمِ M و زاویه‌یِ شیبِ θ قرار می‌دهیم. اگر اصطکاکِ بینِ سطحِ شیب‌دار و زمین کوچک و قابلِ چشم‌پوشی باشد با پایین آمدنِ m، سطحِ شیب‌دار هم عقب می‌رود. شتابِ m نسبت به چارچوبِ لخت، $\mathbf{a}$، و نسبت به چارچوبِ غیرِلختِ سطحِ شیب‌دار را $\mathbf{a}'$ و شتابِ سطحِ شیب‌دار نسبت به زمین را $\mathbf{A}$ می‌گیریم. بردارهایِ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{A}$ اُفقی، و $\mathbf{a}'$ موازی‌یِ سطحِ شیب‌دار است.

از اصطکاکِ بینِ جرمِ m و سطحِ شیب‌دار چشم‌پوشی می‌کنیم. قانونِ نیوتن برایِ جرم‌هایِ m و M عبارت‌اند از

$$N + mA\sin\theta - mg\cos\theta = 0,$$

$$mA\cos\theta + mg\sin\theta = ma',$$

$$N\sin\theta - MA = 0. \tag{81}$$

از حلِ این معادله‌ها، A و a' به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} A &= \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{m\sin^2\theta + M}, \\ a' &= \frac{(m+M)g\sin\theta}{m\sin^2\theta + M}. \end{aligned} \tag{82}$$

بیایید رفتارهایِ حدّیِ جواب را بررسی کنیم.

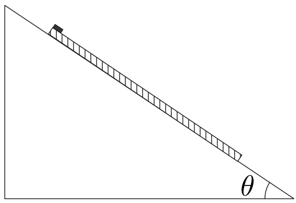
۱) در حدّی که سطح شیبدار خیلی سنگین‌تر از m است، $m/M \to 0$، و همان‌طور که انتظار داریم $A \approx 0$ و $a' \approx g\sin\theta$.

۲) درحالتِ $\theta = 0$، همان‌طور که انتظار داریم $A = a' = 0$.

۳) درحالتِ $\theta = \pi/2$، همان‌طور که انتظار داریم $A = 0$، $a' = g$.

۳—۸ مسائل

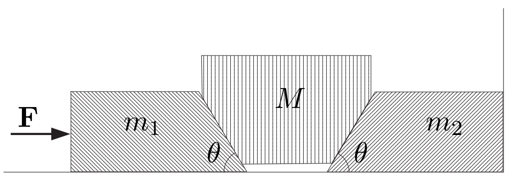
مسئله‌یِ1) طنابی به طول l و با جرم در واحدِ طولِ λ روی سطح شیب‌داری با زاویه‌یِ شیبِ θ قرار داده‌ایم. سرِ طناب را به میخی گره زده‌ایم. ضریبِ اصطکاکِ طناب با سطح μ است. نیرویی که طناب به میخ وارد می‌کند چه مقادیری ممکن است باشد؟



مسئله‌یِ2) نیرویِ F به m_1 وارد می‌شود

الف) همه‌یِ سطوح در شکل بدونِ اصطکاک هستند. . شتابِ m_1، M و هم‌چنین نیرویِ بینِ m_2 و دیوار چه‌قدر است؟

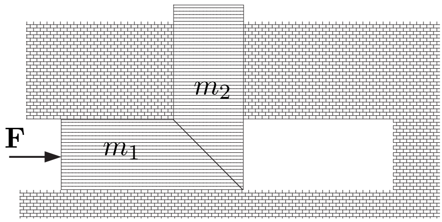
ب) ضریبِ اصطکاکِ همه‌یِ سطوح را μ بگیرید. F چه‌قدر باشد تا دستگاه در آستانه‌یِ حرکت باشد؟



مسئله‌یِ3) نیرویِ افقی‌یِ F به m_1 وارد می‌شود.

الف) همه‌یِ سطوح در شکل بدونِ اصطکاک هستند. شتابِ m_1، و m_2 چه‌قدر است؟

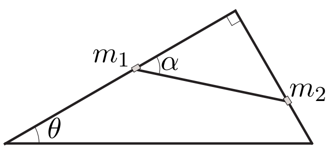
ب) ضریبِ اصطکاکِ همه‌یِ سطوح را μ بگیرید. F چه‌قدر باشد تا دستگاه در آستانه‌یِ حرکت باشد؟



مسئله‌یِ4) مطابقِ شکل دو مهره به جرم‌هایِ m_1، و m_2 با میله‌یِ سبکی به هم وصل شده‌اند. این دو مهره مقیدند که رویِ اضلاعِ مثلثِ قائم‌الزاویه‌ای که در صفحه‌یِ قائم است، حرکت کنند.

الف) از اصطکاک چشم‌پوشی کنید. وقتی که دستگاه در حالِ تعادل است، α را بر حسبِ g، m_1، m_2 و θ به دست آورید.

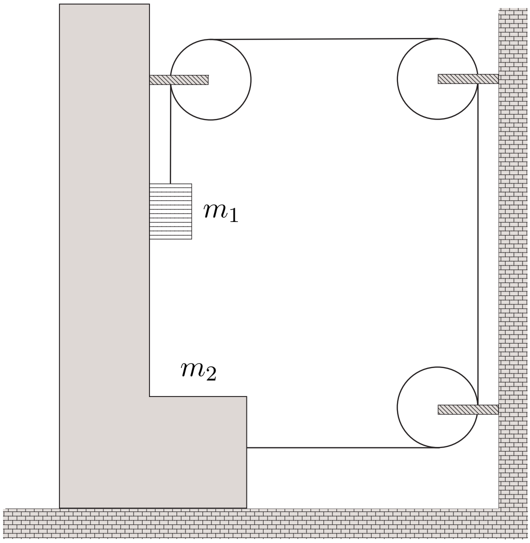
ب) ضریبِ اصطکاکِ مهره‌ها با میله‌ها را μ بگیرید. α چه‌مقادیری می‌تواند داشته باشد تا دستگاه در آستانه‌یِ حرکت باشد؟



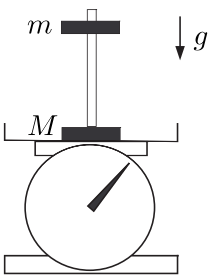
مسئله‌یِ5) دستگاه را از حالتِ سکون رها می‌کنیم.

الف) همه‌یِ سطوح بدونِ اصطکاک هستند. شتابِ m_1، m_2 چه‌قدر است؟

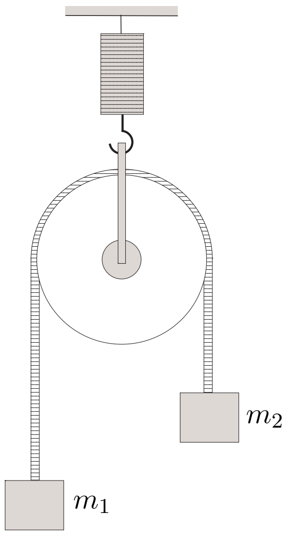
ب) ضریبِ اصطکاکِ سطح‌ها را μ بگیرید. شتابِ m_1، m_2 چه‌قدر است؟



مسئله‌یِ6) در شکلِ زیر پایه‌ای به جرمِ M بر رویِ ترازویی فنری قرار دارد. مهره‌ای به جرمِ m از میله‌یِ متصل به پایه عبور داده شده است. نیرویِ اصطکاکِ بینِ مهره و میله f و آن‌قدر نیست که مهره را ساکن نگه دارد. مهره با چه شتابی پایین می‌آید؟ ترازو هنگامِ لغزیدنِ مهره به پایین چه وزنی را نشان می‌دهد؟



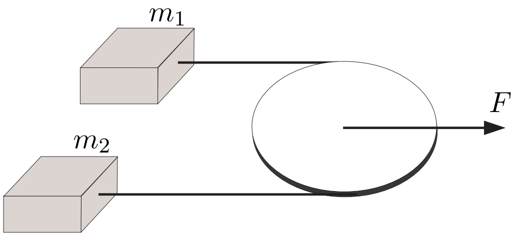
مسئله‌یِ7) مطابقِ شکل دو جرمِ m_1 و m_2 توسطِ نخی که از رویِ قرقره‌یِ ثابتی به جرمِ M رد شده به هم وصل شده‌اند. از جرمِ نخ و اصطکاکِ بینِ نخ و قرقره چشم‌پوشی کنیم. این دستگاه را با یک نیروسنج که به قرقره وصل است وزن می‌کنیم. نیروسنج چه وزنی را نشان می‌دهد؟



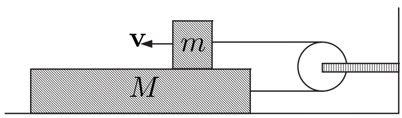
مسئله‌یِ8) مطابقِ شکل دو جرمِ m_1 و m_2 توسط نخی که از رویِ قرقره‌ای گذشته است به هم وصل شده‌اند. مطابقِ شکل قرقره و جرم‌ها رویِ یک سطحِ افقی هستند و این دستگاه با نیرویِ F کشیده می‌شود. از اصطکاکِ بینِ نخ و قرقره و هم‌چنین جرمِ نخ چشم‌پوشی کنید.

الف) از اصطکاکِ بینِ جرم‌ها و زمین، چشم‌پوشی کنید. شتابِ m_1 و m_2 نسبت به زمین را به دست آورید.

ب) ضریبِ اصطکاکِ بینِ جرم‌ها و زمین را μ بگیرید. شتابِ m_1 و m_2 نسبت به زمین را به دست آورید.



مسئله‌یِ9) مطابقِ شکل جسمی به جرمِ m رویِ جسمِ دیگری به جرمِ M $(M > m)$ کشیده می‌شود. هنگامی که سرعتِ آن v_0 شُد دیگر جرمِ m را نمی‌کشیم. ضریبِ اصطکاکِ جنبشی و ایستایی بینِ جرم‌ها μ_k و μ_s است. اصطکاکِ بینِ M و زمین، جرمِ نخ، قرقره و اصطکاکِ نخ و قرقره ناچیز است. اندازه‌یِ شتابِ m چه‌قدر خواهد



شد؟

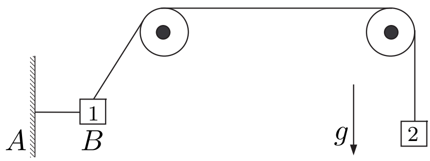
مسئله‌یِ10) مطابقِ شکل دو جسمِ با جرمِ یک‌سانِ m توسطِ نخی که از رویِ دو قرقره رد شده به هم وصل شده‌اند. از وزنِ نخ‌ها، جرمِ قرقره‌ها و اصطکاکِ بینِ نخ و قرقره‌ها صرف‌نظر کنید. زاویه‌یِ بینِ نخی که به جسمِ 1 وصل است و جهتِ قائم را θ بگیرید.

الف) کششِ در هر یک از نخ‌هاچه‌قدر است؟

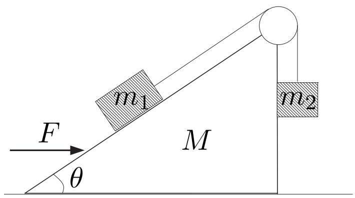
ب) نخِ AB را با قیچی می‌بریم. درست پس از بریدنِ نخ جرمِ 2 بالا می‌رود، پایین می‌رود، یا جابه‌جا نمی‌شود؟ شتابِ جرمِ 2 درست پس از بریدنِ نخ چه‌قدر است؟

ج) سرعتِ جرمِ 1 پس از گذشتنِ زمانِ کوتاهِ δt چه‌قدر است؟

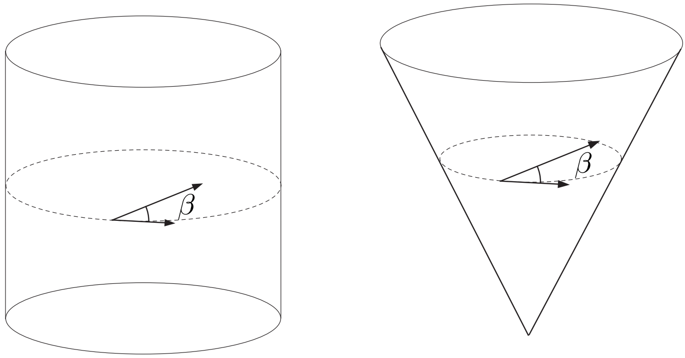
د) شتابِ جرمِ 2 پس از گذشتنِ زمانِ کوتاهِ δt چه‌قدر است؟



مسئله‌یِ11) مطابقِ شکل، جرمِ m_1 که رویِ سطحِ شیب‌داری به جرمِ M و شیبِ θ قرار دارد، توسطِ نخی به جرمِ m_2 متصل است. دستگاه را با چه نیرویِ اُفقیِ F هُل دهیم تا جرم‌هایِ m_1 و m_2 رویِ M ثابت بمانند؟ از اصطکاکِ چشم‌پوشی کنید.



مسئله‌یِ12) مطابقِ شکل ذره‌ای به جرمِ m را رویِ سطحِ داخلیِ استوانه‌ای به شعاعِ R با سرعتِ اولیه‌یِ v_0 که با دایره‌ای اُفقی زاویه‌یِ β می‌سازد، پرتاب می‌کنیم. اصطکاکِ سطحِ داخلیِ استوانه را ناچیز بگیرید.



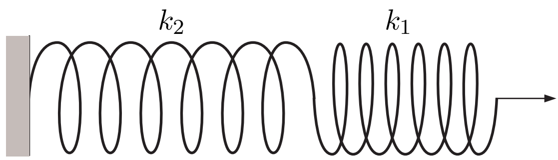
الف) چه نیرویی از طرفِ استوانه به ذره وارد می‌شود.

ب) معادله‌یِ حرکتِ ذره را به دست آورید. ذره تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

ج) اگر به جایِ استوانه ذره را درونِ مخروطی با زاویه‌یِ نیم‌رأسِ α پرتاب می‌کردیم، نتایجِ ما چه می‌شود؟

مسئله‌یِ13) جسمی از انتهای یک فنر قائم آویزان است. سر دیگر فنر ثابت است. جسم را طوری نگه می‌داریم که فنر نه کشیده شده باشد نه فشرده شده. از این حالت جسم را رها می‌کنیم. معادله‌ی حرکت جسم به شکل $y = b + c\cos\omega t$ است. در این جا y ارتفاع جسم از سطح زمین است و c و b و ω ثابت اند. می‌دانیم شتاب لحظه‌ای هر جسمی برابر است با مشتق دوم مکان آن نسبت به زمان. اندازه‌ی شتاب گرانش زمین را g و جهت مثبت را رو به بالا بگیرید. شتاب این جسم در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیرش چه قدر است؟

مسئله‌ی14) ازدو فنر با ضریبِ سختی‌هایِ k_1، و k_2 فنری با ضریبِ سختی‌یِ k



ساخته‌ایم.

الف) سرِ آزادِ فنرِ با ضریبِ سختی‌یِ k_1 را به اندازه‌یِ ℓ می‌کشیم. نقطه‌یِ اتصالِ دو فنر چه‌قدر کشیده می‌شود؟

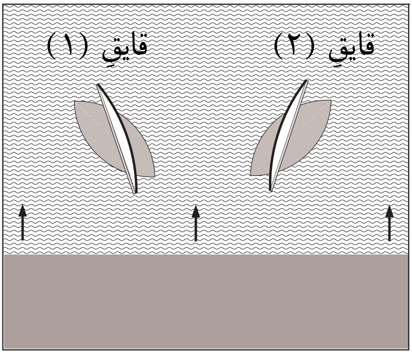
ب) k چه‌قدر است؟

مسئله‌یِ15) ذره‌ای مقید است که رویِ یک خمِ معین حرکت کند. این ذره را با نیرویِ F که مماس بر مسیر است می‌کشیم. اندازه‌یِ سرعتِ ذره v، پس از طی‌کردنِ مسافتِ s، $v(s)$ است. نشان دهید

$$F = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}, \tag{83}$$

که $K := mv^2/2$، انرژی‌یِ جنبشی‌یِ ذره است.

مسئله‌یِ16) در شکلِ زیر دو قایقِ بادبانی را در فاصله‌ای از ساحل (از بالا) می‌بینیم. باد از سمتِ ساحل به دریا می‌وزد. بادبانِ قایق‌ها نیز در شکل مشخص شده‌اند. کدام گزینه درست است؟



الف) هر دو قایق به ساحل نزدیک می‌شوند.

ب) هر دو قایق از ساحل دور می‌شوند.

ج) قایقِ (۱) به ساحل نزدیک و قایقِ (۲) از ساحل دور می‌شود.

د) قایقِ (۱) از ساحل دور و قایقِ (۲) به ساحل نزدیک می‌شود.

فصل ۴

تکانه

شکلِ مرسومِ قانونِ نیوتن $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ است. قانونِ دومِ نیوتن را به شکلِ زیر هم می‌توان نوشت

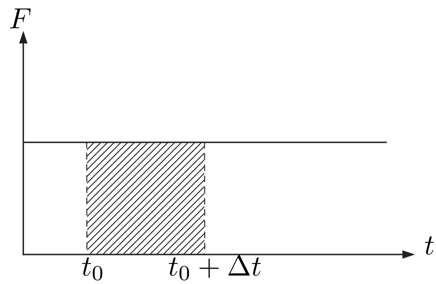
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}. \qquad (1)$$

توجه داریم که در رابطه‌یِ بالا چون جرمِ m را ثابت گرفته‌ایم، توانستیم آن را از عمل‌گرِ مشتق‌گیری‌یِ $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ عبور دهیم. تکانه‌یِ[1] جسمی به جرمِ m و سرعتِ $\mathbf{v}$ با رابطه‌یِ $\mathbf{P} := m\mathbf{v}$ تعریف می‌شود. هرچه جرمِ جسم یا سرعتِ آن بیش‌تر باشد اندازه‌یِ تکانه‌اش بزرگ‌تر است. قانونِ دومِ نیوتن برایِ جسمی با جرمِ ثابت را به صورتِ زیر هم می‌توان نوشت

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}. \qquad (2)$$

حالا این بیان را نیز برایِ قانونِ دومِ نیوتن داریم:

[1]تکانه واژه‌ای است که به عنوانِ ترجمه‌یِ کلمه‌یِ momentum از آن استفاده می‌شود. واژه‌هایِ دیگری مثلِ ممنتم و اندازه‌یِ حرکت نیز گاهی استفاده می‌شود.



شکل ۴—۱:   در یک بُعد ضربه سطحِ زیرِ منحنیِ نیرو بر حسبِ زمان است.

آهنگِ تغییراتِ تکانه‌یِ یک جسم برابر است با نیرویِ وارد بر آن.

اگر نیرویِ کلِ وارد بر جسمی صفر باشد تکانه‌یِ آن $\mathbf{P}$ پایا است، یعنی با زمان عوض نمی‌شود. توجه داشته باشیم که $\mathbf{P}$ یک بردار است و پایا بودنِ آن به معنایِ پایا بودنِ هر سه مؤلفه‌یِ آن است. ممکن است بعضی از مؤلفه‌هایِ نیرو صفر باشند. این متناظر با پایسته[2] ماندنِ مؤلفه‌هایِ متناظر است. مثلاً اگر مؤلفه‌یِ $F_x = 0$ باشد، مؤلفه‌یِ x ِتکانه، P_x، پایا است.

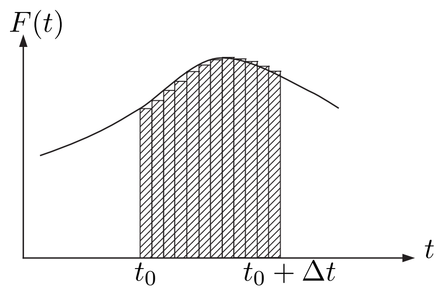
به جسمی نیرویِ ثابتِ $\mathbf{F}$ وارد می‌شود. در مدتِ Δt تغییرِ تکانه‌یِ آن از رابطه‌یِ زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{P} = \mathbf{F} \Delta t. \tag{3}$$

به کمیتِ $\mathbf{F}\Delta t$ ضربه گفته می‌شود. شکلِ (۴—۱) را ببینید اگر نیرویِ وارد بر ذره ثابت نباشد کافی است زمانِ Δt را به تعدادِ زیادیِ ناحیه‌یِ زمانی‌یِ خیلی کوچک تقسیم کنیم. ضربه‌یِ کل جمعِ برداری‌یِ ضربه‌هایِ کوچک است. به زبانِ ریاضی

$$\Delta \mathbf{P} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathrm{d}t \ \mathbf{F}(t). \tag{4}$$

[2] وقتی می‌گوییم کمیتی پایسته است، منظورِمان این است که آن کمیت با زمان عوض نمی‌شود.



شکل ۴—۲: وقتی نیرو تابعِ زمان است، کافی است زمانِ Δt را به تعدادِ زیادی ناحیه‌يِ زمانیِ خیلی کوچک تقسیم کنیم. در یک بُعد ضربه‌يِ کل را جمعِ جبريِ ضربه‌هايِ کوچک می‌گیریم.

نیرويِ متوسطِ وارد بر ذره در مدتِ Δt، $\bar{\mathbf{F}}$ برابر است با

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathrm{d}t\ \mathbf{F}(t). \tag{5}$$

به ازايِ یک ضربه‌يِ معین یا تغییرِ تکانه‌يِ معین هرچه Δt بزرگ‌تر شود نیرويِ متوسط، $\bar{\mathbf{F}}$، کوچک‌تر می‌شود.

به یاد بیاورید وقتی از یک بلندی به پایین می‌پریم، موقعی که پايِ‌مان به زمین می‌رسد به‌تر است آهسته بنشینیم. به این ترتیب سعی می‌کنیم زمانِ برخورد، Δt، را بزرگ و نیرويِ متوسط را کوچک کنیم. تصور کنید وقتی که پايِ‌مان به زمین می‌رسد ناگهان ساکن شویم. در چنین حالتی حتماً پايِ‌مان آسیب می‌بیند. به همین دلیل است که داشبوردِ ماشین را از جنسِ سخت نمی‌سازند. در برخوردِ دو جسمِ سخت زمانِ برخورد کوتاه و تغییرِ تکانه‌يِ هر کدام در برخورد بزرگ‌تر است. علاوه بر این بعضی از کارخانه‌هايِ خودروسازی برايِ جلوگیری از وارد شدنِ آسیب به سرنشین‌هايِ خودرو در هنگامِ تصادف، از تمهیداتی مثلِ نصبِ کیسه‌هايِ هوا استفاده می‌کنند. در زمانِ تصادف کیسه‌هايِ هوا به طورِ خودکار باز می‌شوند. پس از تصادف سرنشینِ خودرو

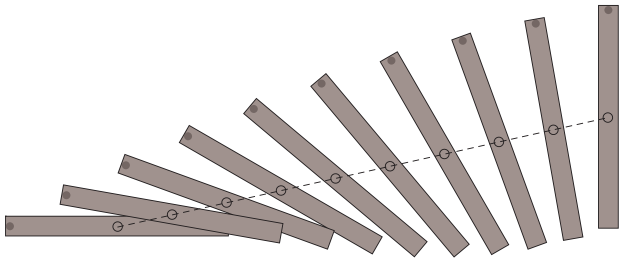
سرعتش صفر می‌شود. هر چه‌قدر بتوانیم مدتی که این تغییرِ سرعت یا تکانه صورت می‌گیرد را طولانی‌تر کنیم نیرویِ متوسطِ وارد به سرنشین کوچک‌تر می‌شود. شاید بعضی از ماشین‌های قدیمی را دیده باشید که راننده‌یِ آن‌ها به خیالِ ایجادِ امنیتِ بیش‌تر سپرهایِ خیلی بزرگ برایِ آن‌ها نصب کرده‌اند یا شاید شنیده باشید که گاهی گفته می‌شود "این ماشین‌هایِ جدید اصلاً به درد نمی‌خورند. این ماشین‌ها خیلی ضعیف هستند. در یک تصادفِ رو در رو بخشِ بزرگی از جلویِ آن‌ها خراب می‌شود". این افراد توجه ندارند که اصل سلامتِ سرنشین است نه سالم ماندنِ خودرو. فرض کنید خودروها از جنسِ بسیار سختی ساخته شوند. در این صورت در یک تصادفِ رو در رو زمانِ برخورد بسیار کوتاه است و تغییرِ تکانه هم ممکن است تا تقریباً دو برابر شود. در تصادفِ چنین خودروهایی نیرویِ بسیار بزرگی به سرنشین‌ها وارد می‌شود.

معمولاً در برخوردِ دو جسمِ سخت زمانِ برخورد کوتاه و نیرویِ متوسطِ وارد بر آن‌ها بزرگ است. ممکن است جسمی تحتِ تأثیرِ نیروهایِ دیگری، مثلاً وزن هم باشد. اگر اندازه‌یِ این نیروها خیلی بزرگ نباشد در مدتِ کوتاهِ برخورد تغییرِ تکانه‌یِ ناشی از این نیروها ناچیز است. معمولاً در برخوردِ دو ذره به جز نیروهایِ ضربه از بقیه‌یِ نیروها چشم‌پوشی می‌کنیم. بنا بر این در برخوردِ دو ذره، در زمانِ برخورد نیروهایِ مهم نیروهایِ برخورد، $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$، هستند که این دو ذره به هم وارد می‌کنند. قانونِ نیوتن برایِ آن‌ها عبارت است از

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_1}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F},$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_2}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{F}. \qquad (6)$$

که $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$ تکانه‌یِ ذره‌یِ 1 و 2 هستند. از رابطه‌یِ بالا نتیجه می‌شود



شکل ۴—۳: پرتابِ یک میله رویِ میزی اُفقی از نمایِ بالا. حرکتِ نقاطِ مختلفِ میله ممکن است پیچپیده باشد اما اگر اصطکاک کوچک و قابلِ چشم‌پوشی باشد، مرکزِ جرمِ میله با سرعتِ ثابت رویِ خطی راست حرکت می‌کند.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_2}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \text{ثابت}. \tag{7}$$

در این صورت کمیتِ $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ در برخورد پایسته می‌ماند.

۴—۱ مرکزِ جرم

ما تا کنون در موردِ حرکتِ یک ذره صحبت کردیم، یعنی وقتی‌که از دوران و تغییرِ شکلِ آن چشم‌پوشی می‌کنیم. اما در حرکتِ یک جسم گاهی علاقه‌مندیم اطلاعاتِ بیش‌تری از حرکتِ آن داشته باشیم. میله‌ای را رویِ میزی پرتاب می‌کنیم، حرکتِ نقاطِ مختلفِ میله ممکن است پیچیده باشد اما اگر اصطکاک کوچک و قابلِ چشم‌پوشی باشد نقطه‌ای از میله هست که حرکتش ساده است. این نقطه مرکزِ جرمِ میله است. این نقطه با سرعتِ ثابت رویِ یک خطِ راست حرکت می‌کند. شکلِ (۴—۳) را ببینید. بیایید این مطلب را با دقتِ بیش‌تری بررسی کنیم. این میله از تعدادِ زیادی ذره تشکیل شده، یعنی می‌توانیم آن را به تعدادِ زیادی تکه‌هایِ کوچک‌تر تقسیم کنیم که ابعاد و چرخشِ آن‌ها برایِ‌مان مهم نباشد. میله دستگاهی شاملِ این تکه‌ها است.

نیروهایِ وارد بر هر تکه‌یِ i اُم را به دو بخشِ داخلی، $\mathbf{F}_{i,\text{int}}$، و خارجی، $\mathbf{F}_{i,\text{ext}}$، تقسیم می‌کنیم. نیروهایِ داخلی نیروهایی هستند که از طرفِ تکه‌هایِ دیگر وارد می‌شوند و نیروهایِ خارجی نیروهایی که از خارجِ دستگاه به تکه‌ها وارد می‌شود. نیروهایِ قائمِ خارجی نیرویِ وزن و نیرویِ عمودی‌یِ سطح هستند، که جمعِ‌شان صفر است. چون از اصطکاک چشم‌پوشی کرده‌ایم نیرویِ خارجیِ افقی نیز وجود ندارد. پس تنها نیروهایِ داخلی باقی می‌ماند. به هر کدام از این تکه‌ها نیروهایی از طرفِ تکه‌هایِ دیگر وارد می‌شود. اگر نیرویِ وارد از تکه‌یِ j اُم بر تکه‌یِ i اُم را $\mathbf{F}_{ji}$ بگیریم، معادله‌یِ نیوتن برایِ تکه‌یِ i اُم با تکانه‌یِ $\mathbf{p}_i$ عبارت است از

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ji}. \tag{8}$$

که علامتِ جمعِ سمتِ راست به معنایِ جمع‌زدن رویِ همه‌یِ مقادیرِ j به جز وقتی است که j با i برابر شود، زیرا هر تکه به خودش نیرویی وارد نمی‌کند. اگر مجموعِ تغییرِ تکانه‌یِ همه‌یِ ذرات را در نظر بگیریم

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ji} = 0. \tag{9}$$

در جمعِ سمتِ راست به ازایِ جمله‌ای مثلِ $\mathbf{F}_{12}$، نیرویی که تکه‌یِ 1 اُم بر تکه‌یِ 2 اُم وارد می‌کند، یک جمله مثلِ $\mathbf{F}_{21}$، نیرویی که تکه‌یِ 2 اُم بر تکه‌یِ 1 اُم وارد می‌کند، وجود دارد که مطابقِ قانونِ سومِ نیوتن جمعِ‌شان صفر است. همه‌یِ نیروهایِ داخلی جفتِ نیروهایی هستند که جمعِ‌شان صفر است. از این‌جا نتیجه می‌شود جمعِ تکانه‌یِ همه‌یِ تکه‌ها، $\mathbf{P} := \sum_i \mathbf{p}_i$، پایسته است. تکانه‌یِ کل را به صورتِ زیر می‌توان نوشت

$$\mathbf{P} := \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\sum_i m_i \mathbf{r}_i)}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

حالا اگر بردارِ مکانِ مرکزِ جرمِ یک جسم را با رابطه‌یِ

$$\mathbf{R}_{\rm cm} := \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \tag{11}$$

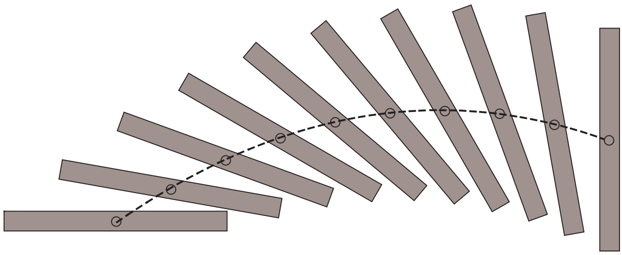
تعریف کنیم، که $M := \sum_i m_i$ جرمِ کل است، تکانه‌یِ کل را بر حسبِ سرعتِ مرکزِ جرم می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{P} = M\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\rm cm}}{\mathrm{d}t} = M\mathbf{V}_{\rm cm} =: \mathbf{P}_{\rm cm} \tag{12}$$

بنا بر این تکانه‌یِ کل، تکانه‌یِ مرکزِ جرمِ میله است اگر همه‌یِ جرمِ میله را در آن نقطه متمرکز بگیریم. در حرکتِ میله تکانه‌یِ کل پایسته است، پس سرعتِ مرکزِ جرم که یک نقطه از میله است پایسته است. مرکزِ جرمِ میله با سرعتِ ثابت رویِ یک خطِ راست حرکت می‌کند. در این حالت جمعِ نیرویِ خارجی رویِ هر تکه صفربود. ممکن است حالت‌هایی رخ دهد که جمعِ نیرویِ خارجی رویِ هر تکه صفر نباشد بل‌که جمعِ نیرویِ خارجی‌یِ کل، $\mathbf{F}_{\rm ext} := \sum_i \mathbf{F}_{i,{\rm ext}}$ صفر باشد. در این حالت نیز مرکزِ جرمِ جسم با سرعتِ ثابت رویِ خطی راست حرکت می‌کند.

مثالِ1) مرکزِ جرمِ یک میله‌یِ یک‌نواخت کجاست؟ برایِ پیدا کردنِ مرکزِ جرمِ یک میله از تعریفِ مرکزِ جرم (11) استفاده می‌کنیم. وسطِ میله را مبدأ ِمختصات بگیرید. اگر میله را به تکه‌هایِ کوچک تقسیم کنیم به ازایِ هر تکه‌ای که در $\mathbf{r}$ است تکه‌ای با همان جرم در $-\mathbf{r}$ قرار دارد. بنا بر این جمعی که در (11) داریم صفر می‌شود. یعنی مبدأ ِمختصات، مرکزِ جرمِ میله است. توجه کنید که این استدلال برایِ میله‌ای که جرمِ آن غیرِیک‌نواخت توزیع شده درست نیست.

حالا بیایید حالتی را در نظر بگیریم که همین میله را پرتاب می‌کنیم. شکلِ (۴—۴) را ببینید. از مقاومتِ هوا چشم‌پوشی کنید. به هر تکه از میله نیرویِ وزنش وارد می‌شود و جمعِ نیروهایِ خارجی صفر نیست. سرعتِ مرکزِ جرم ثابت نیست و رویِ یک خطِ



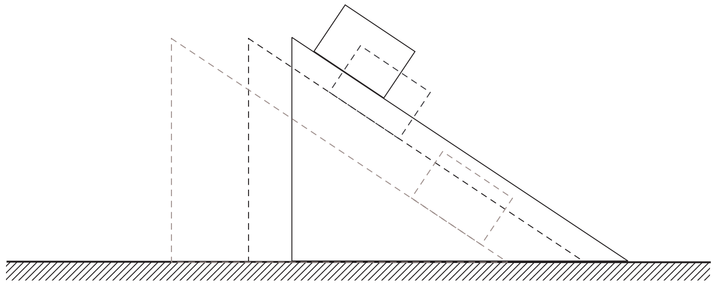
شکل ۴—۴: پرتابِ یک میله. مرکزِ جرم رویِ یک سهمی حرکت می‌کند. حرکت مرکزِ جرمِ میله مثلِ حرکتِ پرتابه‌ای با جرمِ کلِ میله، M، است.

راست حرکت نمی‌کند. هرچند جمعِ نیروهایِ داخلی هم‌چنان صفر است ولی جمعِ نیروهایِ خارجی صفر نیست و معادله‌یِ (9) به صورتِ زیر در می آید

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{F}_{i,\mathrm{ext}} = \sum_i m_i\mathbf{g} = M\mathbf{g}. \qquad (13)$$

مرکزِ جرم رویِ یک سهمی حرکت می‌کند. حرکت مرکزِ جرمِ میله مثلِ حرکتِ پرتابه‌ای با جرمِ کلِ میله، M، است.

مثالِ2) مطابقِ شکلِ (۴—۵)، جسمی به جرمِ m رویِ سطحِ شیب‌داری به جرمِ M قرار می‌دهیم و دستگاه را رها می‌کنیم. اصطکاکِ بینِ سطحِ شیب‌دار و زمین را ناچیز بگیرید. نیروهایِ خارجی‌یِ وارد بر این مجموعه mg، Mg و نیرویِ عکس‌العملِ سطح بر رویِ سطحِ شیب‌دار، N، است. اگر محورِ x را افقی بگیریم، $\mathbf{F}_{x,\ \mathrm{ext}} = 0$. بنا بر این مؤلفه‌یِ x تکانه‌یِ کل، یا همان $P_{x,\ \mathrm{cm}}$ پایسته است. سطحِ شیب‌دار عقب می‌رود، جرمِ m پایین می آید و کمی جلو می‌رود ولی چون در ابتدا دستگاه را از حالِ سکون رها کرده‌ایم، مرکزِ جرم در راستایِ x جابه‌جا نمی‌شود. چون نیرویِ خارجی در راستایِ قائم است مرکزِ جرم با شتاب به سمتِ پایین سقوط می کند.

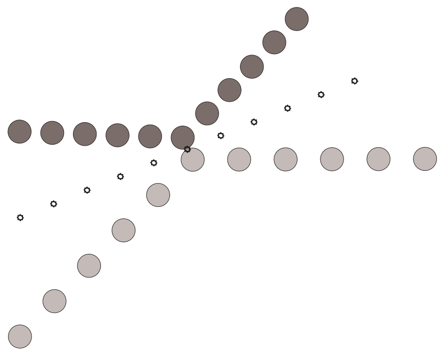


شکل ۴—۵: مربوط به مثالِ 2.

۴—۲ برخورد

در مثال‌هایِ بخشِ قبل ما دستگاهی از ذرات را در نظر گرفتیم که یک جسمِ صُلب[3] را تشکیل می‌دادند. ولی چنین قیدی واقعاً لازم نیست. فرض کنید که دستگاهی از ذرات داشته باشیم که فاصله‌یِ ذرات با گذشتِ زمان عوض شود، باز هم بحث‌هایِ قبل را می‌توانیم تکرار کنیم. اگر نیروهایِ خارجی نباشند، شتابِ مرکزِ جرمِ دستگاهِ ذرات صفر است. مرکزِ جرم یا ساکن است یا با سرعتِ ثابت حرکت می‌کند. به عنوانِ مثال بیایید برخوردِ دو گوی در غیاب نیرویِ خارجی را در نظر بگیریم. شکلِ (۴—۶) را ببینید. مرکزِ جرم جایی بینِ دو گوی است. تکانه‌یِ آن همان تکانه‌یِ کل است. دو گوی که به هم‌دیگر نزدیک می‌شوند مرکزِ جرم هم بینِ‌شان در حرکت است. وقتی که دو گوی به هم می‌خورند، مرکزِ جرم نیز در محلِ برخورد است. قبل و پس از برخورد چون نیرویِ خارجی در کار نیست، مرکزِ جرم رویِ خطی راست با سرعتِ ثابت حرکت می‌کند.

[3] جسمِ صُلب، جسمی است که فاصله‌یِ بینِ ذراتِ تشکیل دهنده‌اش ثابت است. جسمِ کاملاً صلب نداریم ولی هر جسمِ سختی تقریباً جسمِ صلب است.



شکل ۴—۶: برخوردِ دو گوی در غیابِ نیروهایِ خارجی. مرکزِ جرم رویِ خطی راست با سرعتِ ثابت حرکت می‌کند.

۴—۳ مسائل

مسئله‌یِ1) خودرویِ A دارد با سرعتِ v حرکت می‌کند. این خودرو به یک مانع می‌رسد و متوقف می‌شود. خودرویِ B دارد با همان سرعتِ v حرکت می‌کند و وقتی به مانع می‌رسد جهتِ سرعتش را عوض می‌کند. سرعتِ نهایی عمود بر سرعتِ اولیه و اندازه‌اش v' است. جرمِ دو خودرو با هم برابر است. اندازه‌یِ ضربه‌یِ وارد بر کدام خودرو بیش‌تر است؟

الف) A

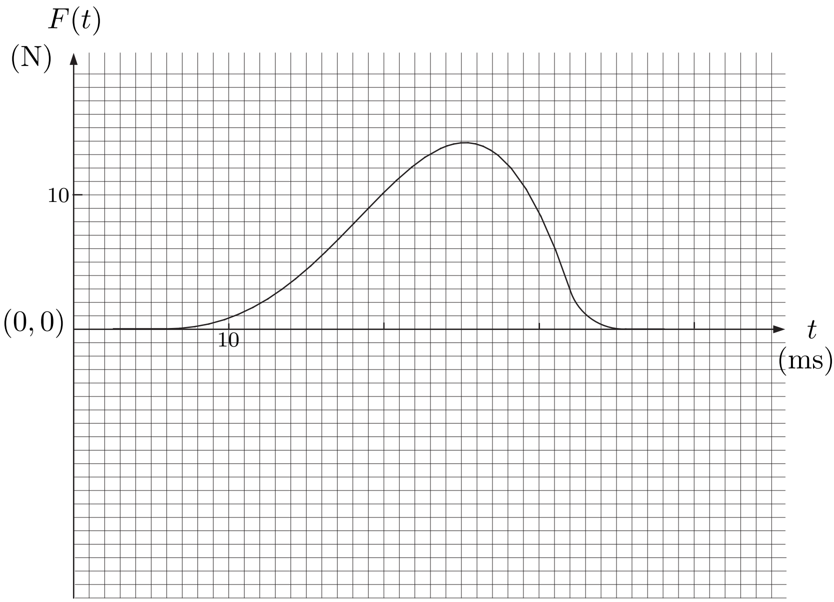
ب) B

ج) این دو ضربه با هم برابر اند.

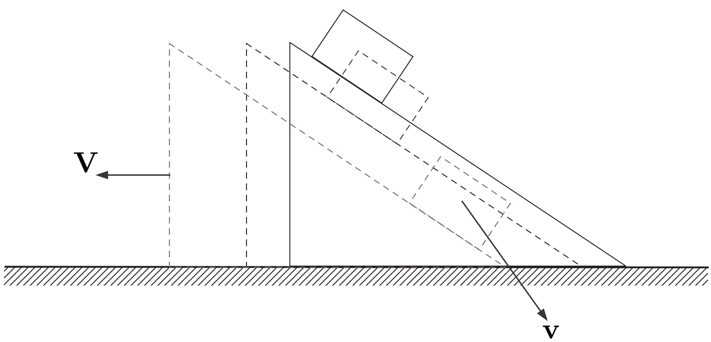
د) اگر (v'/v) از حدِ معینی بیش‌تر باشد B، و اگر (v'/v) از آن حد کم‌تر باشد A

مسئله‌یِ2) گلوله‌ای به دیوار برخورد می‌کند و برمی‌گردد. تغییرِ تکانه‌یِ گلوله در برخورد چه‌قدر است؟ نمودارِ اندازه‌یِ نیرویی که در این مدت به گلوله وارد می‌شود، $F(t)$، به صورتِ تابعی از زمان را درشکل ببینید. نیرویِ متوسطِ وارد به ذره چه‌قدر

است؟



مسئله‌یِ3) جسمی به جرمِ m رویِ سطحِ شیب‌داری با شیبِ θ به جرمِ M قرار می‌دهیم و دستگاه را رها می‌کنیم. اصطکاکِ بینِ سطحِ شیب‌دار و زمین را ناچیز بگیرید. وقتی m به پایینِ سطحِ شیب‌دار می‌رسد، سرعتِ سطحِ شیب‌دار V است. سرعتِ m در این لحظه، $\mathbf{v}$، چه‌قدر است؟



مسئله‌یِ4) مرکزِ جرمِ دایره، مربع، مستطیل و مثلث در چه نقطه‌ای است؟

فصل ۵

کار و انرژی

در فصلِ دینامیک یاد گرفتیم که از قوانینِ نیوتن برایِ پیش‌بینی‌یِ حرکتِ یک ذره استفاده کنیم. اما حلِّ این معادلات گاهی اوقات بسیار پیچیده است. گاهی اوقات ممکن است راهِ دیگری هم برایِ پیش‌بینی‌یِ حرکتِ یک ذره وجود داشته باشد. اساسِ این روش بر این حقیقت استوار است که گاهی کمیت‌هایی در حرکت پایسته می‌مانند. پایستگی‌یِ تکانه را قبلاً بررسی کردیم. در این فصل می‌خواهیم کمیتِ دیگری به نامِ انرژی‌یِ مکانیکی را تعریف کنیم که ممکن است در حالت‌هایِ خاصی پایسته بماند. اگر به تعدادِ کافی کمیتِ پایسته داشته باشیم گاهی بدونِ حلِ معادلاتِ نیوتن اطلاعاتِ زیادی در موردِ حرکت به دست می‌آوریم. پیدا کردنِ کمیت‌هایِ پایسته به یک روش در فیزیک تبدیل شده است. در بخش‌هایی از فیزیک مثلِ دنیایِ میکروسکوپیک که مکانیکِ نیوتنی از کار می‌اُفتد این ایده که به دنبالِ کمیت‌هایِ پایسته باشیم هنوز کار می‌کند.

۵–۱ کار و انرژی

بیایید ابتدا حالتِ یک‌بعدی و مثالی بسیار ساده را بررسی کنیم. نیرویِ کلِ وارد بر ذره، F، را ثابت بگیریم. قانونِ نیوتن عبارت است از

$$m\dot{v} = F. \tag{1}$$

اگر دو طرفِ این رابطه را در v ضرب کنیم، نتیجه را می‌توانیم به صورتِ یک مشتقِ کامل بنویسیم

$$mv\dot{v} - Fv = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 - Fx\right) = 0. \tag{2}$$

در این‌جا ما کمیتی را پیدا کردیم که هم تابعِ سرعتِ ذره است و هم تابعِ مکانِ آن، اما در حینِ حرکتِ ذره پایسته است. این کمیت را انرژیِ مکانیکی می‌نامیم و با E نمایش می‌دهیم. در این مثالِ خاص انرژیِ مکانیکی برابر است با

$$E := \frac{1}{2}mv^2 - Fx. \tag{3}$$

بُعدِ انرژی $[E] = ML^2T^{-2}$ است. برایِ هر بخشِ انرژیِ مکانیکی یک اسم می‌گذاریم. بخشِ اول $mv^2/2$ است که به آن انرژیِ جنبشی می‌گوییم و آن را با K نمایش می‌دهیم. بخشِ دیگرِ انرژی را انرژیِ پتانسیل می‌نامیم و آن را با U نمایش می‌دهیم. در این مثال $U = -Fx$ است. به U هر مقدارِ ثابتی هم که اضافه کنیم، انرژیِ مکانیکی هم‌چنان پایسته است. پس

$$E = K + U. \tag{4}$$

چون این کمیت پایسته است با گذشتِ زمان عوض نمی‌شود و مقدارش همانی است که در ابتدا بود. پس

$$\frac{1}{2}mv^2 - Fx = \frac{1}{2}mv_0^2 - Fx_0, \qquad \Rightarrow \qquad v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0). \qquad (5)$$

در این‌جا از $a = F/m$ استفاده کرده‌ایم. اتفاقی که می‌افتد این است که در حینِ حرکتِ ذره سرعتِ آن و در نتیجه انرژی‌ِ جنبشی‌ِاش تغییر می‌کند. اما هم‌زمان بخشِ دیگرِ انرژی یعنی انرژی‌ِ پتانسیل هم تغییر می‌کند به طوری‌که انرژی‌ِ مکانیکی‌ِ کلِ ذره ثابت می‌ماند. انرژی‌ِ پتانسیل آن‌بخشی از انرژی است که بستگی‌ِ صریح به نیروی‌ِ خارجی دارد و تابعِ مکانِ ذره است. کمیتِ $F(x - x_0)$ را به عنوانِ کارِ نیروی‌ِ F تعریف می‌کنیم، و با W نمایش می‌دهیم. در این صورت کارِ نیروی‌ِ F برابر است با منفی‌ِ تغییرِ انرژی‌ِ پتانسیلِ ذره در جابه‌جایی از x_0 به x.

$$W_F = -\Delta U = F\Delta x. \qquad (6)$$

می‌گوییم نیروی‌ِ F کاری انجام می‌دهد که باعث می‌شود انرژی به صورتِ انرژی‌ِ پتانسیل ذخیره شود.

رابطه‌ِی (5) همان چیزی است که از حلِّ قانونِ نیوتن برایِ نیروی‌ِ ثابت به دست می‌آوریم. البته باید همین انتظار را هم می‌داشتیم. چون ما پایستگی‌ِ انرژی را از قانونِ نیوتن به دست آوردیم و نباید انتظار داشته باشیم که نتیجه‌ِی ما با آن چیزی که از قانونِ نیوتن به دست آوردیم ناسازگار باشد. یک مثال برایِ نیروی‌ِ تقریباً ثابت، نیروی‌ِ گرانش در نزدیکی‌ِ زمین است. اگر محورِ x را قائم و رو به بالا بگیریم، این نیرو $F = -mg$ می‌شود. انرژی‌ِ پتانسیلِ مربوط به این نیرو $U = mgx$ است. تا این‌جا مسئله‌ای یک‌بُعدی،که نیروی‌ِ F برآیندِ نیروها و نیرویی ثابت بود، را بررسی کردیم. تعمیمِ قضیه‌ِی بالا به سه‌بُعد برایِ نیروی‌ِ ثابت بسیار ساده است. در این حالت قانونِ نیوتن

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}. \tag{7}$$

است. اگر دو طرفِ این رابطه را در $\mathbf{v}$ ضربِ داخلی کنیم، می‌رسیم به

$$m\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{F}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\right) = 0. \tag{8}$$

مجدداً یک کمیتِ اسکالرِ ثابت به دست می‌آوریم. انرژیِ جنبشی همان $m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}/2 = mv^2/2$ و انرژیِ پتانسیل $U = -\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$ است. انرژیِ مکانیکی $E = K + U$ هم پایسته است. اگر بخواهیم رابطه‌یِ کار و انرژیِ پتانسیل شبیهِ حالتِ یک‌بُعدی باشد، به‌تر است کار برایِ بیش از یک بُعد را به صورتِ $W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$ تعریف کنیم. در این صورت داریم $W = -\Delta U$. در صورتی که نیرو بر جابه‌جایی عمود باشد کارِ نیرو صفر است.

حالا برگردیم به حالتِ یک‌بُعدی و فرضِ ثابت‌بودنِ نیرو را کنار بگذاریم. فرض کنیم نیرویِ برآیند فقط تابعی از مکان است. در این‌صورت معادله‌یِ (2) به صورتِ زیر در می آید.

$$mv\dot{v} - F(x)v = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) - F(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{9}$$

حالا اگر انرژیِ پتانسیل را به صورتِ زیر تعریف کنیم

$$\mathrm{d}U := -F(x)\mathrm{d}x, \quad \text{یا} \quad F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}. \tag{10}$$

می‌بینیم که باز هم انرژیِ مکانیکی یک کمیتِ پایسته است،

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U(x)\right) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad E = K + U(x) = \text{ثابت}. \tag{11}$$

معادله‌یِ (10) تعریفِ تغییراتِ انرژی‌یِ پتانسیل است. در واقع می‌توانیم یک مقدارِ ثابت به U اضافه کنیم، بدونِ آن‌که اختلافِ انرژی‌یِ پتانسیل تغییری کند. به زبانِ دیگر ما این آزادی را داریم که پتانسیلِ همه‌یِ نقاط را به یک اندازه اضافه کنیم. با انتخابِ یک نقطه با انرژی‌یِ پتانسیلِ معینِ مثلاً صفر ما مبدأِ پتانسیل را تعیین می‌کنیم. برایِ نیروهایِ یک‌بُعدی‌ای که فقط تابعِ مکان باشند علی‌الاصول هم‌واره می‌توانیم $U(x)$ را پیدا کنیم. به زبانِ ریاضی داریم

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x. \tag{12}$$

در این‌صورت به هر نقطه از فضا یک عدد نسبت می‌دهیم. اندازه‌یِ این عدد مستقل از تاریخ‌چه‌یِ حرکت است. کاری که نیرویِ $F(x)$ در جابه‌جایی‌یِ ذره از x_0 تا x انجام می‌دهد را به صورتِ زیر تعریف می‌کنیم.

$$W_{F(x)} := \int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x = -\Delta U(x). \tag{13}$$

به نیروهایی که می توانیم برایِ آن‌ها انرژی‌یِ پتانسیل تعریف کنیم، نیرویِ پایستار می‌گوییم. برایِ نیروهایِ پایستار کاری که نیرویِ $F(x)$ در جابه‌جاییِ ذره از x_0 تا x انجام می‌دهد، مستقل از مسیر است و تنها به نقاطِ ابتدا و انتهایی‌یِ حرکت بستگی دارد. دسته‌ای دیگر از نیروها هستند که کارِ شان در جابه‌جاییِ ذره از x_0 تا x تنها تابعی از مکانِ نقاطِ ابتدایی و انتهایی نیست و به مسیرِ حرکت، زمانِ انجامِ آن و $\cdots$ بستگی دارد. این نیروها نیروهایِ غیرِ پایستار هستند. برایِ نیروهایِ غیرِ پایستار نمی‌توانیم به هر نقطه از فضا یک مقدارِ معینِ انرژی‌یِ پتانسیل نسبت دهیم. نیروهایِ تابعِ زمان، یا سرعت مثلِ $F(v,t)$ نیروهایِ غیرِ پایستار هستند. نیرویِ اصطکاک جنبشی هر چند ممکن است اندازه‌اش ثابت باشد ولی جهتش بستگی به مسیر دارد، و هم‌واره عکسِ جهتِ سرعتِ نقطه‌یِ تماسِ جسم است، $\mathbf{f} = -f_0\frac{\mathbf{v}}{v}$. بنا بر این

اصطکاکِ جنبشی نیرویِ غیرِپایستار است.

مثالِ1) جرمِ m به فنری به ضریبِ سختی‌یِ k وصل شده. نیرویی که فنر به جرمِ m وارد می‌کند $F = -kx$ است. انرژی‌یِ پتانسیلِ مربوط به این نیرو عبارت است از

$$U(x) - U(x_0) = \int_{x_0}^{x} kx\mathrm{d}x = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}. \tag{14}$$

با تعیینِ مبدأِ پتانسیل، انرژی‌یِ پتانسیل به طورِ یک‌تا تعیین می‌شود. فرض کنید $U(0) = 0$، یعنی جایی که فنر نه کشیده و نه فشرده است، را مبدأِ پتانسیل بگیریم. پس

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \tag{15}$$

در سه‌بُعد قانونِ نیوتن

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{16}$$

است. اگر دو طرفِ این رابطه را در $\mathbf{v}$ ضربِ داخلی کنیم، می‌رسیم به

$$m\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{F}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) - \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{17}$$

برایِ تعمیمِ نتایجِ بالا به سه‌بُعد کارِ نیرویِ $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ در جابه‌جایی‌یِ ذره از $\mathbf{r}_0$ تا $\mathbf{r}$ در مسیرِ خمِ C با رابطه‌یِ زیر تعریف می‌کنیم

$$W_{\mathbf{F}(\mathbf{r})} := \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} F(\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{18}$$

این تعریف همه‌یِ حالت‌هایِ خاصی را که قبلاً در نظر گرفته بودیم را در بر می‌گیرد. علی‌الاصول کارِ نیرویِ $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ برایِ جابه‌جایی‌یِ ذره نه تنها به نقاطِ ابتدایی و انتهایی

بل‌که به مسیرِ C هم بستگی دارد. اما در حالت‌هایی خاص کارِ نیرویِ $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ برایِ جابه‌جاییِ ذره تنها به نقاطِ ابتدایی و انتهایی بستگی دارد. در این موارد می‌توانیم برایِ این نیروها انرژیِ پتانسیل تعریف کنیم. تغییراتِ انرژیِ پتانسیل را به صورتِ زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{d}U := -\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \quad \text{یا} \quad U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} F(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{19}$$

هر چند نیرو کمیتی برداری است اما مطابقِ تعریفِ بالا کار و انرژیِ پتانسیل کمیت‌هایِ عددی یا اسکالر هستند. نیروهایِ تابعِ زمان، سرعت و به طورِ خلاصه همه‌یِ نیروهایی که به تاریخ‌چه‌یِ حرکت بستگی دارند نیروهایِ غیرِپایستار هستند. در یک‌بُعد همه‌یِ نیروهایی که تابعِ مکان هستند پایستاراند، اما در بیش از یک‌بُعد این قضیه درست نیست، یعنی بعضی از نیروهایی که به شکلِ $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ هستند، انتگرالِ‌شان از نقطه‌یِ $\mathbf{r}_0$ تا $\mathbf{r}$ هم به نقاطِ ابتدا و انتها و هم به مسیر بستگی دارد. این نیروهایِ تابعِ مکان هم غیرِپایستاراند. اگر نیرویِ برآیند پایستار باشد انرژیِ مکانیکی پایسته است.
مثالِ2) نیرویِ مربوط به یک نوسان‌گرِ هم‌آهنگِ سه‌بُعدیِ هم‌سان‌گرد $F(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$ است. انرژیِ پتانسیلِ مربوط به این نیرو

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= \int_0^{\mathbf{r}} k\mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= \int_0^{r} kr\mathrm{d}r = \frac{kr^2}{2}. \end{aligned} \tag{20}$$

در این‌جا از $\mathbf{e}_r\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}r$ استفاده کرده‌ایم و $\mathbf{r}_0 = 0$ را مبدأ پتانسیل گرفته‌ایم. توجه دارید که مهم نیست انتگرال را در چه مسیری از مبدأ تا $\mathbf{r}$ محاسبه کنیم.

اگر چند نیرو داشته باشیم کار را چه‌گونه تعریف کنیم؟ بیایید از همان تعریفِ کلی استفاده کنیم. کارِ هر نیرو را مشابهِ کارِ نیرویِ برآیند، یعنی رابطه‌یِ (18) تعریف می‌کنیم. از این‌جا بدیهی است که کارِ نیرویِ برآیند جمعِ کارِ تک‌تکِ نیروها می‌شود،

یعنی یا باید جمعِ برداریِ نیروها و سپس کار را حساب کنیم، یا آن که کار هر نیرو را حساب کنیم و آن‌ها را با هم جمعِ عددی کنیم.

$$W_{\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\cdots} = W_{\mathbf{F}_1} + W_{\mathbf{F}_2} + \cdots. \tag{21}$$

اگر چند نیرو داشته باشیم که همه‌یِ آن‌ها پایستار باشند، می‌توانیم برایِ این مجموعه‌یِ نیروها یک انرژی‌یِ پتانسیل بنویسیم. این کمیت جمعِ عددی‌یِ انرژی‌یِ پتانسیلِ مربوط به تک‌تکِ نیروها است.

$$U_{\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\cdots} = U_{\mathbf{F}_1} + U_{\mathbf{F}_2} + \cdots. \tag{22}$$

۵–۱–۱ قضیه‌یِ کار و انرژی

معادله‌یِ (17) را می‌توان به صورتِ

$$\Delta K = W. \tag{23}$$

نوشت. بیانی از معادله‌یِ بالا این است که تغییراتِ انرژی‌یِ جنبشی برابر است با کارِ نیرویِ بر آیند. اگر بخشی از نیروها پایستار و بخشی دیگر پایستار نباشند، کار را به دو بخشِ کارِ نیروهایِ پایستار، W_c، و کارِ نیروهایِ غیرِپایستار، W_{nc}، تقسیم می‌کنیم. برایِ نیروهایِ پایستار می‌توانیم انرژی‌یِ پتانسیل تعریف کنیم، پس $W_c = -\Delta U$. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\Delta K = W_c + W_{nc}, \qquad \Rightarrow \qquad \Delta E = \Delta K + \Delta U = W_{nc}. \tag{24}$$

در حضورِ نیروهایِ غیرپایستار انرژی‌یِ مکانیکی لزوماً پایسته نیست و تغییراتِ آن برابر است با کارِ نیروهایِ غیرِپایستار. در حالت‌هایِ خاصی که کارِ نیروهایِ غیرِ پایستار صفر باشد، انرژی‌یِ مکانیکی پایسته است.

مثالِ3) جسمی به جرمِ m به فنری به ضریبِ سختی‌یِ k وصل شده. این مجموعه رویِ میزی افقی قرار دارد. جسم را می‌کشیم به طوری‌که فنر به اندازه‌یِ ℓ_0 کشیده شود و سپس جسم را رها می‌کنیم. اگر از اصطکاک چشم‌پوشی کنیم، نیروهایِ وارد بر جسم، وزنِ جسم mg، نیرویِ عمودی‌یِ سطح N، و نیرویِ فنر $F = -kx$ هستند. چون نیروهایِ وزن و عمودی‌یِ سطح بر جابه‌جایی عموداند، کارشان صفر است. نیرویِ فنر پایستار است و به آن انرژی‌یِ پتانسیل $U = kx^2/2$ را نسبت می‌دهیم. انرژی‌یِ مکانیکی پایسته است.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\ell_0^2. \tag{25}$$

جرمِ m شروع به نوسان می‌کند. اولین جایی که ساکن می‌شود $-\ell_0$ است. بنا بر این جسم بینِ ℓ_0 و $-\ell_0$ نوسان می‌کند. می‌گوییم دامنه‌یِ نوسان ℓ_0 است. حالا بیایید اصطکاک را هم در نظر بگیریم. ضریبِ اصطکاکِ ایستایی و جنبشی‌یِ بینِ جسم و میز را μ می‌گیریم. نیرویِ اصطکاک $f = \mu N = \mu mg$ است. با μ، m، g، و k می‌توانیم کمیتی با بُعدِ طول بسازیم

$$\varepsilon := \frac{\mu mg}{k}. \tag{26}$$

به خاطرِ اصطکاک انرژی‌یِ مکانیکی پایسته نیست و تغییرِ انرژی‌یِ مکانیکی برابر است با کارِ نیرویِ غیرِپایستارِ اصطکاک، $\Delta E = W_f$. وقتی جسم رها می‌شود شروع به نوسان می‌کند ولی دامنه‌یِ نوسان به تدریج کوچک می‌شود تا آن‌که بالاخره می‌ایستد.

جسم را می‌کشیم به طوری‌که فنر به اندازه‌یِ ℓ_0 کشیده شود و سپس جسم را رها می‌کنیم. اولین جایی که سرعتِ جسم صفر می‌شود را ℓ_1 می‌گیریم. چند حالت ممکن است رخ دهد:

الف) فنر آن‌قدر کم کشیده شده که سرِ جایش می‌ماند. در این‌حالت نیرویِ فنر از بیشینه‌یِ نیرویِ اصطکاکِ ایستایی کوچک‌تر است.

$$k\ell_0 < \mu mg \quad \Rightarrow \quad \ell_0 < \varepsilon. \tag{27}$$

ب) فنر را کمی بیش‌تر از حالتِ قبل می‌کشیم به طوری که جسم حرکت کند ولی به مبدأ نرسد. چون جسم حرکت می‌کند پس $\ell_0 > \varepsilon$. در ℓ_1 ساکن می‌شود، پس

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}k\ell_1^2 - \frac{1}{2}k\ell_0^2 = W_f = -\mu mg(\ell_0 - \ell_1) \\ &(\ell_1 - \ell_0)(\ell_1 + \ell_0 - \frac{2\mu mg}{k}) = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

دو جوابِ برایِ ℓ_1 به دست می‌آید که جوابِ $\ell_1 = \ell_0$ مربوط به مکانِ اولیه است. جوابِ دیگر $\ell_1 = 2\varepsilon - \ell_0$ است. پس برایِ این‌که این حالت رخ دهد، ℓ_0 باید در ناحیه‌یِ زیر باشد

$$\varepsilon < \ell_0 < 2\varepsilon. \tag{29}$$

ج) فنر را باز هم بیش‌تر از حالتِ قبل می‌کشیم به طوری $\ell_0 > 2\varepsilon$ باشد. در این‌صورت جسم حرکت می‌کند و از مبدأ رد شود و در $\ell_1 = 2\varepsilon - \ell_0 < 0$ ساکن می‌شود. در این حالت

$$2\varepsilon < \ell_0. \tag{30}$$

فرض کنید انرژیِ اولیه یا در واقع کشیدگی‌ِ فنر آن‌قدر هست که جسم تعدادِ زیادی رفت و برگشت داشته باشد. یعنی $\varepsilon \ll \ell_0$. اولین جایی که سرعتِ جسم صفر می‌شود، $\ell_1 = 2\varepsilon - \ell_0$. اندازه‌یِ دامنه به اندازه‌یِ 2ε کم می‌شود. این کاهشِ دامنه مستقل از اندازه‌یِ خودِ دامنه است. پس در هر مرحله دامنه به همین اندازه کوچک می‌شود. دامنه پس از اولین نوسان، یا به تعبیرِ دقیق‌تر در اولین رفت و برگشت یعنی دومین جایی که جسم ساکن می‌شود $\ell_2 = \ell_0 - 4\varepsilon$ است. مسافتی که جسم در نوسانِ اول طی می‌کند

$$d_2 = \ell_0 - 2(2\varepsilon - \ell_0) + \ell_0 - 4\varepsilon = 4(\ell_0 - 2\varepsilon) \tag{31}$$

است. زمانی‌که برایِ دومین بار ساکن می‌شود انرژیِ ذره برابر است با

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}k\ell_0^2 - \mu m g d_1 = \frac{1}{2}k\ell_0^2 - 4\mu m g(\ell_0 - 2\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2}k(\ell_0 - 4\varepsilon)^2. \end{aligned} \tag{32}$$

بعد از N بار رد شدن از مبدأ $\ell_N = (-1)^N(\ell_0 - 2N\varepsilon)$ است. مسافتی که جسم در این مدت طی کرده

$$
\begin{aligned}
d_N &= \ell_0 - 2\ell_1 + \cdots + 2(-1)^{N-1}\ell_{N-1} + (-1)^N \ell_N \\
&= \ell_0 + 2\left[(\ell_0 - 2\varepsilon) + (\ell_0 - 4\varepsilon) + \cdots + (\ell_0 - 2(N-1)\varepsilon)\right] + \ell_0 - 2N\varepsilon \\
&= 2N\ell_0 - 4\varepsilon\frac{(N-1)(N)}{2} - 2N\varepsilon \\
&= 2N(\ell_0 - N\varepsilon). \qquad (33)
\end{aligned}
$$

پس از N بار رد شدن از مبدأ انرژیِ ذره برابر است با

$$
\begin{aligned}
E_N &= \frac{1}{2}k\ell_0^2 - \mu m g d_N, \\
&= \frac{1}{2}k\ell_0^2 - 4\mu m g N(\ell_0 - N\varepsilon), \\
&= \frac{1}{2}k(\ell_0 - 2N\varepsilon)^2. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

بالاخره پس از تعدادی نوسان جرمِ m ساکن می‌شود. به طورِ خلاصه پس از این‌که N بار از مبدأ رد شد مکانِ جسم $\ell_N = (-1)^N(\ell_0 - 2N\varepsilon)$ و مسافتی که تا این لحظه طی کرده $d_N = 2N(\ell_0 - N\varepsilon)$ است. بیایید یک مثالِ عددی بزنیم مثلاً $\ell_0 = 65.3\varepsilon$. پس از این‌که 32 مرتبه از مبدأ رد شد،

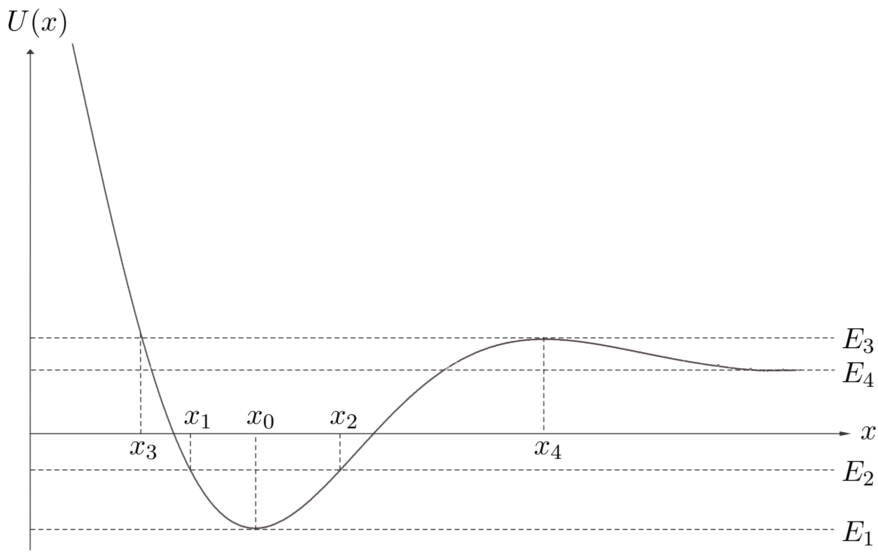
$$\ell_{32} = (-1)^{32}(\ell_0 - 64\varepsilon) = 1.3\varepsilon. \qquad (35)$$

چون $\varepsilon < \ell_{32} = 1.3\varepsilon < 2\varepsilon$ است، جسم از مبدأ رد می‌شود و در

$$x_f = \ell_{33} = -0.7\varepsilon. \qquad (36)$$

ساکن می‌شود. کلِ مسافتی که در این مدت طی کرده

$$d_{33} = 66(\ell_0 - 33\varepsilon) = 2145\varepsilon. \qquad (37)$$



شکل ۵—۱: با استفاده از منحنیِ انرژیِ پتانسیل بر حسبِ مکان در یک بُعد می‌توانیم اطلاعاتی کیفی در موردِ حرکت به دست آوریم.

اگر $\ell_0 = 64.9\varepsilon$ باشد جسم کجا می‌ایستد؟

۵—۲ نمودارِ انرژیِ پتانسیل بر حسبِ مکان در یک‌بُعد

معادله‌یِ (10) رابطه‌ای است بینِ نیرو و شیبِ انرژیِ پتانسیل در یک‌بُعد. فرض کنید مسئله یک‌بُعدی و همه‌یِ نیروهایِ وارد بر ذره پایستار هستند. با نگاهی به نمودارِ انرژیِ پتانسیل بر حسبِ مکان می‌توانیم اطلاعاتی کیفی در موردِ حرکت به دست آوریم، مثلاً در نقاطی که این شیب صفر است نیرویِ وارد بر ذره صفر است. اگر ذره در این نقطه ساکن باشد ساکن می ماند. بنا بر این ذره در این نقاط می‌تواند در حالِ تعادل باشد. بیایید به عنوانِ مثال شکلِ (۵—۱) را در نظر بگیرید. منحنیِ انرژیِ پتانسیل بر حسبِ مکانِ ذره رسم شده است. محورِ عمودی انرژی و محورِ افقی مکان

است. بُعدِ محورِ عمودی ML^2T^{-2}، بُعدِ محورِ افقی L و بُعدِ شیبِ منحنی انرژی بر مکان، MLT^{-2}، یا نیرو است. انرژیِ مکانیکیِ کل پایسته است یعنی با زمان عوض نمی‌شود. وقتی ذره حرکت می‌کند، انرژیِ پتانسیل و انرژیِ جنبشیِ آن در مکان‌هایِ مختلف تغییر می‌کنند ولی انرژیِ مکانیکیِ کل ثابت است، پس نمودارِ انرژیِ مکانیکیِ کل بر حسبِ مکان یک خطِ افقی است. چنان‌که خواهیم دید محلِ تقاطعِ خطِ انرژیِ مکانیکی و انرژیِ پتانسیل نواحیِ مجازی که ذره می‌تواند در آن‌ها باشد را معین می‌کند. ما نمودارهایِ انرژیِ مکانیکیِ ذره برایِ چند انرژیِ مختلف را در شکلِ (۵—۱) رسم کرده‌ایم.

انرژیِ جنبشی، $\frac{1}{2}mv^2 = E - U(x)$، هم‌واره مثبت است. پس کمینه مقداری که انرژیِ مکانیکیِ ذره می‌تواند اختیار کند نمی‌تواند از کمینه‌یِ انرژیِ پتانسیل کم‌تر باشد. پس کم‌ترین انرژیِ مکانیکیِ ممکن $E_1 = U_{\min}$ است. فرض کنیم انرژیِ مکانیکیِ ذره E_1 باشد. در $x = x_0$، $E_1 - U(x_0) = 0$ و در نقاطِ $x \neq x_0$، $E_1 - U(x) < 0$ است. پس اگر انرژیِ مکانیکیِ ذره E_1 باشد، در $x = x_0$ سرعتِ ذره $v = 0$ است و در بقیه‌یِ نقاط $v^2 < 0$ است که ممکن نیست. پس ذره نمی‌تواند در $x \neq x_0$ باشد. شیبِ منحنیِ انرژیِ پتانسیل بر حسبِ مکان در $x = x_0$ صفر است، پس در $x = x_0$ هم سرعتِ ذره و هم شتابِ آن صفر است. بنا بر این با انرژیِ E_1 ذره در x_0 هم‌واره ساکن می‌ماند.

اگر انرژیِ ذره E_2 باشد، نقاطِ مجازِ ذره $x_1 \leq x \leq x_2$ است. در نقاطِ x_1 و x_2 سرعتِ ذره صفر است. اما

$$F(x_1) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}|_{x=x_1} > 0, \qquad F(x_2) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}|_{x=x_2} < 0. \tag{38}$$

در x_1 ذره به جلو هُل داده می‌شود و در x_2 رو به عقب. پس ذره در این نقاط ساکن نمی‌ماند. در $x_1 \leq x < x_0$، شیبِ منحنیِ انرژیِ پتانسیل بر حسبِ مکان

منفی است پس در این نقاط $F(x) > 0$ و شتابِ ذره $a > 0$ است. یعنی اگر در $x_1 \leq x < x_0$، سرعتِ ذره منفی باشد، چون $av < 0$ است، حرکتِ آن کند شونده است. اندازه‌یِ سرعتِ ذره کم می‌شود تا آن‌که در x_1 سرعتِ آن صفر شود. اما چون در x_1 شتاب مثبت است مجدداً در جهتِ مثبتِ x شروع به حرکت می‌کند. اگر سرعتِ ذره مثبت باشد، چون $av > 0$ است، حرکتِ آن تند شونده و در جهتِ مثبتِ x است. در x_0 سرعتِ ذره بیشینه است. توجه کنید که در x_0 فاصله‌یِ خطِ انرژی‌یِ مکانیکی و انرژی‌یِ پتانسیل بیشینه است. در $x_0 \leq x \leq x_2$ شیبِ منحنی‌یِ انرژی‌یِ پتانسیل بر حسبِ مکان مثبت و نیرو منفی است. ذره پس از عبور از x_0 سرعتش کم می‌شود تا آن‌که در x_2 ساکن می‌شود. اگر انرژی‌یِ ذره فقط کمی بیش‌تر از E_1 باشد ذره حول و حوشِ x_0 نوسان می‌کند. به نقطه‌یِ x_0، نقطه‌یِ تعادلِ پای‌دار می‌گوییم.

اگر انرژی‌یِ ذره E_3 باشد نواحی‌یِ مجاز $x_4 \leq x \leq x_3$ و $x_4 \leq x$ است. $\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}|_{x=x_4} = 0$. پس x_4 هم نقطه‌یِ تعادل است. اما تعادل در این نقطه ناپای‌دار است، یعنی اگر انرژی‌یِ فقط ذره کمی‌بیش‌تر از E_3 باشد نیرو حول و حوشِ x_4 به گونه‌ای است که ذره را از این نقطه دور می‌کند. بنا بر این نقاطِ کمینه و بیشینه‌یِ انرژی‌یِ پتانسیل نقاطِ تعادلِ پای‌دار و ناپای‌دارِ حرکتِ ذره هستند. با فرضِ این‌که انرژی‌یِ پتانسیل در بی‌نهایت مجانب داشته باشدِ سرعتِ ذره در x هایِ بزرگ ثابت است. فرض کنید ذره‌ای در x_0 ساکن است، پس انرژی‌یِ آن E_1 است. اگر به این ذره آن‌قدر انرژی‌یِ بدهیم که انرژی‌اش کمی بیش از E_3 شود ذره می‌تواند از پتانسیل آزاد شود و به فواصلِ دور برود. در فواصلِ دور سرعتش ثابت است. هر چه انرژی‌یِ ذره به E_3 نزدیک‌تر باشد سرعتِ ذره در بی‌نهایت کوچک‌تر است. اگر انرژی‌یِ ذره E_4 باشد، در نقطه‌ای سرعتش صفر است. اگر در حالی که در این نقطه ساکن است کمی انرژی به ذره بدهیم ذره با سرعتی کوچک و ثابت دور می‌شود. می‌گوییم در این نقاط تعادلِ ذره بی‌تفاوت است.

مثالِ4) در شکلِ (۵—۱) انرژی‌یِ پتانسیلِ ذره در x_4 بیشینه است. فرض کنید

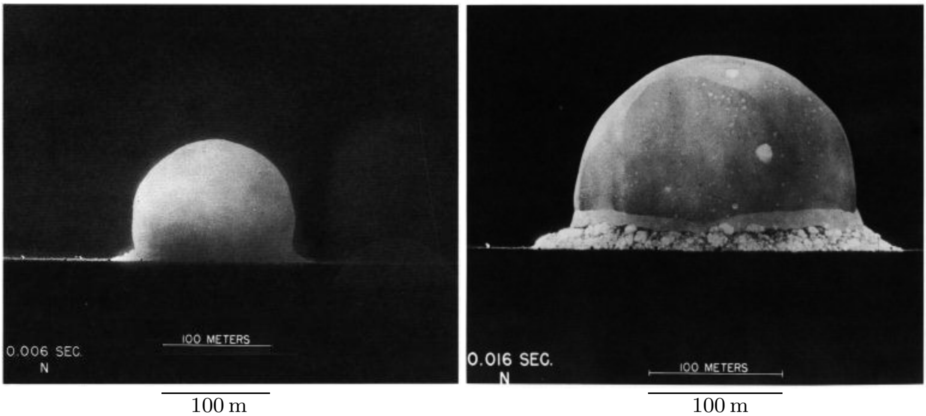
انرژیِ پتانسیل در نزدیکیِ x_4 تحلیلی است، یعنی بسطِ تیلور دارد و این بسط به تابعِ $U(x)$ هم‌گرا است. اگر انرژیِ مکانیکیِ ذره E_3 باشد، $E_3 = U(x_4)$. فرض کنید ذره در نقطه‌یِ x $(x < x_4)$ است و با سرعتِ $v > 0$ به سمتِ x_4 می‌رود. می‌خواهیم ببینیم چه مدت طول می‌کشد که ذره به x_4 برسد. اگر x به اندازه‌یِ کافی به x_4 نزدیک باشد می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} U(x) &= U(x_4) + U'(x_4)(x - x_4) + \frac{1}{2!}U''(x_4)(x - x_4)^2 + \cdots \\ &\approx U(x_4) + \frac{\alpha}{2}(x - x_4)^2. \end{aligned} \tag{39}$$

چون x_4 نقطه‌یِ بیشینه‌یِ انرژیِ پتانسیل است، $U'(x_4) = 0$ و $\alpha := U''(x_4) < 0$. پایستگیِ انرژیِ مکانیکی نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} E &= U(x) + \frac{1}{2}mv^2 \\ U(x_4) &= U(x_4) + \frac{\alpha}{2}(x - x_4)^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ v^2 &= -\frac{\alpha}{m}(x - x_4)^2. \end{aligned} \tag{40}$$

چون $v > 0$ است جوابِ $\dot{x} = v = -\sqrt{-\alpha/m}(x - x_4)$ قابلِ قبول است. جوابِ این معادله به شکلِ $x - x_4 = C\mathrm{e}^{-\sqrt{-\alpha/m}\ t}$ است، که C مقداری ثابت است. بنا بر این در $t \to \infty$ ذره به x_4 می‌رسد. در این حالت نزدیک شدنِ ذره به x_4 بر حسبِ زمان تابعی نمایی است. اگر فرضِ $U''(x_4) \neq 0$ را کنار بگذاریم نتیجه چه می‌شود؟ اگر شرطِ این‌که پتانسیل در نزدیکیِ نقطه‌یِ بیشینه تحلیلی باشد را برداریم، ممکن است زمانِ رسیدنِ ذره به نقطه‌یِ بیشینه محدود شود.



شکل ۵—۲: دو عکس که در سالِ ۱۹۴۵ از آزمایشِ اتمیِ ترینیتی 6 ms و 16 ms پس از انفجار گرفته شده.

۵—۳ چند مثال

بیایید ابتدا چند مثال را با تحلیلِ ابعادی بررسی کنیم.

مثالِ5) در سالِ 1945، اولین آزمایشِ بمبِ اتمی در نیومکزیکو و با نامِ ترینیتی[1] انجام شد. در سالِ 1946 ارتش ایالاتِ متحده عکس‌هایی از این واقعه را منتشر کرد. در تعدادی از این عکس‌ها زمانِ گرفتنِ عکس به هم‌راهِ اندازه‌یِ گویِ انفجار نیز آمده بود. فیزیک‌دانِ روس، سِدُف[2]، با استفاده از این اطلاعات و تحلیلِ ابعادی قدرتِ انفجار را تخمین زد. استدلالِ او این بود که شعاعِ گویِ انفجار پس از زمانِ t، یعنی $R(t)$ ، تنها به زمانِ t، کلِ انرژیِ آزاد شده E، و چگالیِ هوا ρ بستگی دارد. به سادگی می‌توان نشان داد تنهاکمیتِ بی‌بُعدی که با $R(t)$، E، t و ρ می‌توان ساخت $R^5\rho/(Et^2)$ است. پس

---
[1] trinity
[2] Sedov

$$R=\mu\cdot\left(\frac{Et^2}{\rho}\right)^{1/5}, \tag{41}$$

که در این‌جا μ کمیتی بی‌بعد است. بر مبنای استدلال‌هایی مبتنی بر فیزیکِ شوک‌موج‌ها او نتیجه گرفت μ تقریباً 1 است. عکس‌هایی که در شکلِ (۵—۲) می‌بینید $6\ \mathrm{ms}$ و $16\ \mathrm{ms}$ پس از انفجار است. در هر یک از عکس‌ها طولِ پاره‌خطی که در عکس مشخص شده $100\ \mathrm{m}$ است. با توجه به این عکس‌ها اینک می‌توانید نشان دهید انرژیِ آزاد شده در انفجار حدودِ $10^{14}\ \mathrm{J}$ است. در واقع می‌توانید از یکی از عکس‌ها استفاده کنید و $\mu\approx 1$ بگیرید. با استفاده از اطلاعاتِ هر دو عکس، می‌توانید درستی رابطه‌یِ بالا را بررسی کنید. با توجّه به این که هر تُن تی‌اِن‌تی $4.2\times 10^9\ \mathrm{J}$ است، قدرتِ این انفجار تقریباً $25\ \mathrm{kT}$ تی‌اِن‌تی بوده است.

مثالِ6) یک گویِ توپر به شعاعِ R از ارتفاعِ h رویِ یک سطحِ سخت می‌افتد و از صفحه‌ای که از مرکزِ گوی می‌گذرد می‌شکند. برایِ شکستنِ گوی لازم است پیوندِ بینِ ملکول‌هایی که از هم دور می‌شوند بشکنند و شکستن هر پیوند مقدار معینی انرژی لازم دارد که به جنسِ ماده مربوط است. برای گوی‌هایِ از جنسِ یک‌سان، کم‌ترین مقدارِ h برایِ شکستنِ گوی به این شکل با R^α متناسب است. α چند است؟

اگر گوی در ارتفاعِ h باشد انرژی‌اش $E=mgh=\dfrac{4\pi R^3\rho gh}{3}$ است که m جرمِ گوی و ρ چگالی‌یِ آن است. فرض کنید انرژی‌یِ لازم برایِ شکستنِ هر پیوند ε و تعداد ملکول‌ها در واحدِ سطحِ گوی N باشد. در این صورت تعداد پیوندهایِ شکسته شده πR^2N و انرژی‌یِ لازم برایِ این‌کار $\pi R^2N\varepsilon$ است. اگر همه‌یِ انرژی‌یِ اولیه صرفِ شکستنِ پیوندها شود کم‌ترین ارتفاعِ لازم به دست می‌آید.

$$\frac{4\pi R^3\rho gh}{3}=\pi R^2N\varepsilon \qquad\Rightarrow\qquad h\propto R^{-1}. \tag{42}$$

پس $\alpha=-1$. یعنی هرچه گوی کوچک‌تر باشد برایِ آن‌که بشکند باید از ارتفاعِ بالاتری بیفتد. احتمالاً دیده‌اید که تیله‌هایِ کوچکِ شیشه‌ای رویِ زمین می‌افتند ولی

نمی‌شکنند ولی یک گویِ شیشه‌ای بزرگ‌تر اگر از ارتفاعِ کمی هم بیفتد ممکن است بشکند.

مثالِ7) یک حباب صابونِ باردار را در نظر بگیرید. این حباب یک انرژیِ سطحی دارد متناسب با مساحتِ حباب، و یک انرژیِ الکتروستاتیک متناسب با مجذورِ بار و عکس شعاعِ حباب. وضعیت تعادل وضعیتی است که انرژیِ پتانسیلِ کل (مجموع این دو انرژی) کمینه است. شعاعِ حباب در حالت تعادل متناسب با Q^{α} است، که Q بارِ حباب و α یک ثابت است. α چه قدر است؟

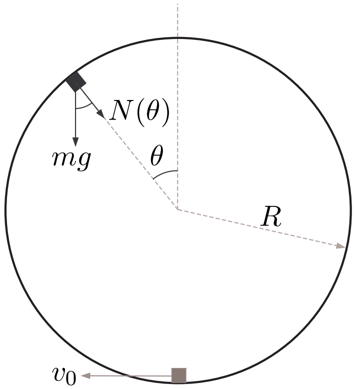
انرژیِ سطحی $E_s = 4\pi R^2\sigma$ که σ ثابتی است که به جنسِ حباب بستگی دارد. انرژیِ الکتروستاتیک $E_Q = KQ^2/R$ است که K ثابتی بنیادی است. انرژیِ پتانسیلِ کل

$$U = 4\pi R^2\sigma + \frac{KQ^2}{R}. \tag{43}$$

همان‌طور که در صورتِ سئوال آمده شعاعِ حالتِ تعادل، R_0، از کمینه کردنِ انرژی پتانسیلِ کل به دست می‌آید

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}R}|_{R=R_0} = 8\pi R_0\sigma - \frac{KQ^2}{R_0^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_0 \propto Q^{2/3}. \tag{44}$$

در ابتدایِ این‌فصل دیدیم که هر وقت نیروهایی که به جسمی وارد می‌شوند پایستار باشند انرژیِ مکانیکی پایسته است. ما پایستگی‌ِ انرژی را از قانونِ نیوتن به دست آوردیم. در یک‌بُعد قانونِ نیوتن یک معادله است و پایستگی‌ِ انرژی هم یک معادله است. در یک بُعد این دو معادله هم‌اَرزند. اما در دو (یا سه بُعد) قانونِ نیوتن که معادله‌ای برداری است دو (یا سه) معادله است. اما پایستگی‌ِ انرژی که معادله‌ای اسکالر است، هم‌چنان یک معادله است. بدیهی است که این یک معادله نمی‌تواند



شکل ۵–۳:

هم‌ارزِ آن چند معادله باشد. اطلاعاتِ معادله‌یِ پایستگی‌یِ انرژی در ابعادِ بیش از یک از قوانینِ نیوتن کم‌تر است. ممکن است حرکت‌هایی از لحاظِ پایستگی‌یِ انرژی مجاز باشند ولی از نظرِ قوانینِ نیوتن غیرِ مجاز. گاهی اوقات برایِ حلِ مسئله ساده تر است که از ترکیبِ این‌ها استفاده کنیم، مثلاً در دو بُعد از پایستگی‌یِ انرژی و یکی از معادله‌هایِ نیوتن. در مثالِ 17 فصلِ سوم برایِ به دست آوردنِ زاویه‌یِ جداشدنِ جسم از نیم‌کره از قانونِ نیوتن برایِ دو مؤلفه‌یِ r و θ استفاده کردیم. در واقع در آن مثال پایستگی‌یِ انرژی را ثابت کردیم. در این‌جا می‌خواهیم چند مثال را بررسی کنیم که در حلِ آن‌ها از بخشی از قوانینِ نیوتن و پایستگی‌یِ انرژی استفاده می‌کنیم.

مثالِ8) مطابقِ شکلِ (۵–۳) ذره‌ای به جرمِ m را با سرعتِ اولیه‌یِ v_0 از پایین‌ترین نقطه‌یِ کره‌ای پرتاب می‌کنیم. می‌خواهیم کم‌ترین مقدارِ v_0 برایِ آن‌که ذره به بالاترین نقطه‌یِ کره برسد را به دست آوریم. برایِ حلِ مسئله از پایستگی‌یِ انرژی و مؤلفه‌یِ شعاعی‌یِ قانونِ نیوتن استفاده می‌کنیم.

$$-N(\theta) - mg\cos\theta = -m\frac{v^2(\theta)}{R},$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR(1+\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2(\theta). \qquad (45)$$

اما پایستگی‌یِ انرژی برای بالاترین نقطه‌ی نیم‌کره

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgR + \frac{1}{2}mv_1^2. \qquad (46)$$

به تنهایی کافی نیست زیرا مقدارِ v_1 اندازه‌یِ سرعت در بالاترین نقطه معلوم نیست. با استفاده از مؤلفه‌یِ شعاعی‌یِ قانونِ نیوتن می‌توانیم سرعتِ جسم $v(\theta)$ را در زاویه‌یِ θ به دست آوریم. با جاگذاری‌یِ آن در معادله‌یِ انرژی داریم

$$N(\theta) = m\frac{v_0^2}{R} - mg(2+3\cos\theta). \qquad (47)$$

کم‌ترین مقدارِ v_0 وقتی اتفاق می‌افتد که در بالاترین نقطه‌یِ کره جسم در آستانه‌یِ جداشدن باشد، یعنی $N(0)=0$ باشد.در این صورت $v_{0,\min} = \sqrt{5gR}$. اگر v_0 از این مقدار کم‌تر باشد جسم به بالاترین نقطه‌یِ کره نمی‌رسد و قبل از رسیدن به آن نقطه از دیواره جدا می‌شود.

۵—۴ توان

کارِ نیرویِ $\mathbf{F}$ در جابه‌جایی‌یِ نقطه‌اثرش به اندازه‌یِ $\mathrm{d}\mathbf{r}$ برابر است با

$$\mathrm{d}W = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}. \qquad (48)$$

توانِ نیرو یا به تعبیرِ دقیق‌تر توانِ لحظه‌ای به صورت کار بر واحد زمان تعریف می‌شود

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \qquad (49)$$

بُعدِ توان ML^2T^{-3} یا انرژی بر واحدِ زمان و واحدِ آن چیزی مثلِ ژول‌برثانیه است که به آن وات[3] هم می‌گویند. گاهی اوقات هم از واحدی مثلِ وات‌ساعت (Wh) به عنوانِ واحدِ انرژی استفاده می‌شود

$$1\ \mathrm{Wh} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \cdot 3600\ \mathrm{s} = 3.6 \times 10^3\ \mathrm{J}. \tag{50}$$

مهندس‌ها معمولاً واحدِ توان را اسبِ بُخار ([4]hp) می‌گیرند که

$$1\ \mathrm{hp} = 746\ \mathrm{W} = 746\ \mathrm{Js}^{-1} \tag{51}$$

است. برایِ خودروها هم توان تعریف می‌شود و آن مقدار انرژی‌ای است که در واحدِ زمان از سوختِ خودرو به دست می‌آید. البته راندِمان خودروها معمولاً کم است، چیزیحدودِ 10 یا 15 درصد. خودرویی که با سرعتِ ثابتِ v حرکت می‌کند در معرضِ نیروهای اصطکاک و مقاومتِ هوا و $\cdots$ است. توانِ خودرو صرفِ فائق‌آمدن بر این نیروها می‌شود.

مثالِ9) نیرویِ اصطکاکِ وارد بر یک خودرو $A\,v^{\alpha}$ است، که A یک ثابت است که به اندازه و شکلِ خودرو بستگی دارد، v سرعتِ خودرو است، و α هم یک ثابت دیگر است. بیشینه‌یِ توانِ این خودرو P است. خودروهایی را در نظر بگیرید که α و P برایِ شان یک‌سان است، اما A برایِ‌شان متفاوت است. بیشینه‌یِ سرعتِ ثابتِ این خودروها با A^{β} متناسب است. β چه‌قدر است؟

فرض کنید که خودرو با بیش‌ترین توان و با سرعتِ v در حرکت است. توانِ خودرو با توانِ نیرویِ اصطکاک fv برابر است. برایِ دو خودرویِ متفاوت

$$P = A_1 v_1^{\alpha+1}$$

---

[3] Watt

[4] horse power

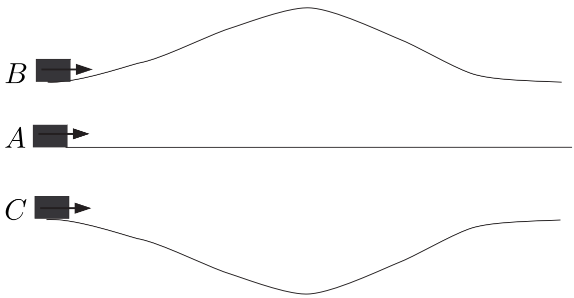
$$P = A_2 v_2^{\alpha+1}. \tag{52}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\alpha+1} \qquad \Rightarrow \qquad v \propto A^{-1/(\alpha+1)} \tag{53}$$

۵–۵ مسائل

مسئله‌یِ1) سه جسمِ A، B و C مطابقِ شکل در کنارِ یک‌دیگر و با سرعتِ اولیه‌یِ یک‌سان به طرفِ راست حرکت می‌کنند. جسمِ A مسیرش را از رویِ خطی اُفقی ادامه می دهد ولی جسمِ B مسیرِش را از رویِ تپه‌ای و جسمِ C مسیرِش را از طریقِ درّه‌ای می‌پیماید. با چشم‌پوشی از اصطکاک و این که B و C هیچ‌گاه از مسیر جدا نشوند و هیچ‌کدام هم به چپ و راست منحرف نشوند کدام‌یک زودتر به انتهایِ مسیر می‌رسند؟



مسئله‌یِ2) انرژی‌یِ پتانسیلِ ذره‌ای در یک‌بُعد $U(x) = -\beta|x|^{3/2}$ است.

a) انرژی‌یِ پتانسیل در کجا بیشینه است؟ این نقطه را x_0 بگیرید.

b) فرض کنید انرژی‌یِ ذره $E = U(x_0)$ است. اگر ذره به سمتِ x_0 برود، چه‌مدت طول می‌کشد تا ذره به x_0 برسد؟

مسئله‌یِ3) جسمی به جرمِ m با سرعتِ v به یک فنرِ غیرِ ایده‌آل نزدیک می‌شود. نیرویِ فنر با رابطه‌یِ

$$F = -k_1 x - k_2 x^3$$

داده می‌شود که x تغییرِ طولِ فنر از حالتِ آزادِ آن و k_1 و k_2 ثابت هستند. پس از برخوردِ m با فنر بیشترین فشردگی آن چه‌قدر است؟

مسئله‌ی4) دو جسم یک‌سان با جرم یک کیلوگرم به دو سرِ فنری بسته شده و روی میز بدون اصطکاکی قرارداده شده‌اند. معادله‌ی سرعت—زمان این دو جسم به‌صورت

$$V_1 = 1\ (\mathrm{m/s}) + 2\ (\mathrm{m/s})\cos(t/2s),$$
$$V_2 = 1\ (\mathrm{m/s}) - 2\ (\mathrm{m/s})\cos(t/2s). \qquad (54)$$

است. درصورتی‌که در لحظه اول انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر صفر باشد. حداکثر انرژی ذخیره‌شده در فنر چه‌قدر خواهد بود؟

الف) 5J ب) 4J ج) 0J د) -4J ه) -5J

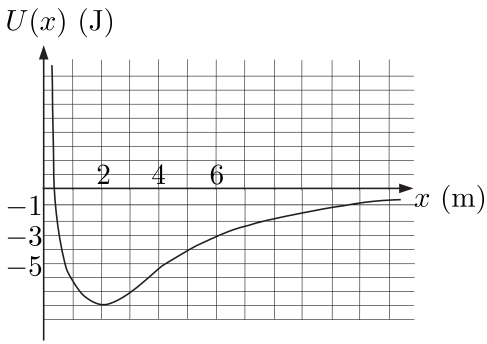
مسئله‌ی5) یک حباب صابون باردار را در نظر بگیرید. این حباب یک انرژی سطحی دارد متناسب با مساحت حباب، و یک انرژی الکتروستاتیک متناسب با مجذور بار و عکس شعاع حباب. وضعیت تعادل وضعیتی است که انرژی پتانسیل کل (مجموع این دو انرژی) کمینه است. این حباب به دو حباب یک‌سان تفکیک می‌شود. انرژی پتانسیل کل حباب اولیه (در حالت تعادل) را با U و مجموع انرژی پتانسیل کل دو حباب حاصل (در حالت تعادل) را با U' نشان می‌دهیم. رابطه‌ی U' با U کدام است؟

الف) $U' = \frac{1}{2}U$ ب) $U' = 2^{-1/3}U$ ج) $U' = U$ د) $U' = 2^{1/3}U$

مسئله‌ی6) ذره‌ای به جرمِ $2\,Kg$ تحتِ تأثیرِ پتانسیلِ $U(x)$ و در حالتِ تعادلِ پای‌دار است. سرعتِ اولیه‌ی v_0 (بر حسبِ m/s) به ذره می‌دهیم تا کاملاً از قیدِ پتانسیل آزاد شود. در شکل منحنی‌ِ انرژی‌ِ پتانسیل بر حسبِ x را می‌بینید.

الف— v_0 حداقل چه‌قدر باشد تا ذره از قیدِ پتانسیل آزاد شود؟

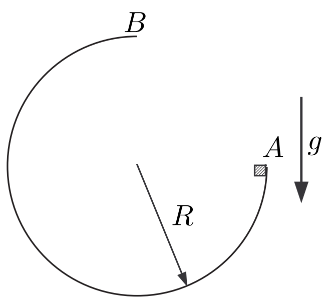
ب— اگر سرعتِ اولیه‌ی ذره v_1، دو برابر مقداری که در بندِ الف به دست آوردید باشد سرعتِ ذره در فواصلِ خیلی دور چه‌قدر خواهد بود؟



مسئله‌یِ7) مطابقِ شکل ذره‌ای به جرمِ m رویِ یک میله که به شکلِ $3/4$ یک دایره به شعاعِ R است، حرکت می‌کند.

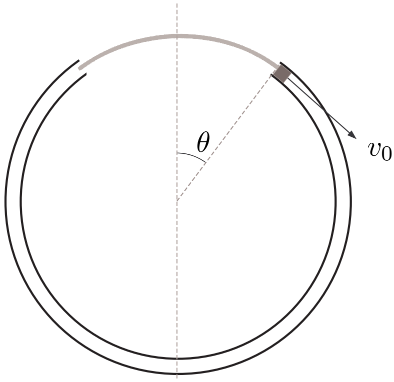
الف— سرعتِ ذره در نقطه‌یِ A حداقل چه قدر باشد تا به نقطه‌یِ B برسد؟ نیرویِ وارد به ذره از طرفِ میله در نقطه‌ی B چه‌قدر است؟

ب— آیا امکان دارد که سرعتِ ذره در نقطه‌یِ A طوری باشد تا پس از رسیدن به نقطه‌یِ B راهش را به گونه‌ای ادامه دهد که مجدداً به نقطه‌یِ A برسد؟



مسئله‌یِ8) لوله‌ای را مطابقِ شکل به صورتِ کمانی از دایره در می‌آوریم. جسمِ کوچکی را با سرعتِ اولیه‌یِ v_0 درونِ لوله پرتاب می‌کنیم. فرض کنید اصطکاکِ بینِ لوله و جسم قابلِ چشم‌پوشی باشد. v_0 چه‌قدر باشد تا پس از پرتاب حرکتِ جسم دوره‌ای باشد؟ یعنی پس از این‌که جسم از طرفِ دیگرِ لوله

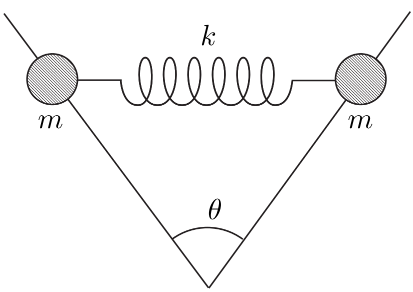
خارجِ شد مسیری سهمی را طی کند و مجدداً با همین سرعت واردِ لوله شود.



مسئله‌یِ 9) دو دانه‌یِ تسبیح به جرمِ m مقیدند رویِ دو میله‌یِ اُفقی حرکت کنند. این دو میله با هم زاویه‌یِ θ می‌سازند. دو دانه‌یِ تسبیح را کاملاً متقارن با فنری ایده‌آل با ضریبِ سختی‌یِ k و طولِ آزادِ l_0 به هم وصل می‌کنیم. از اصطکاکِ بینِ دانه‌یِ تسبیح و میله چشم‌پوشی کنید. دو جرم را رویِ دو میله حرکت می‌دهیم به طوری‌که فاصله‌یِ آن‌ها بزرگ‌تر از l_0 شود. فرض کنید فنر هم‌واره موازی‌یِ حالتِ اولیه بماند.

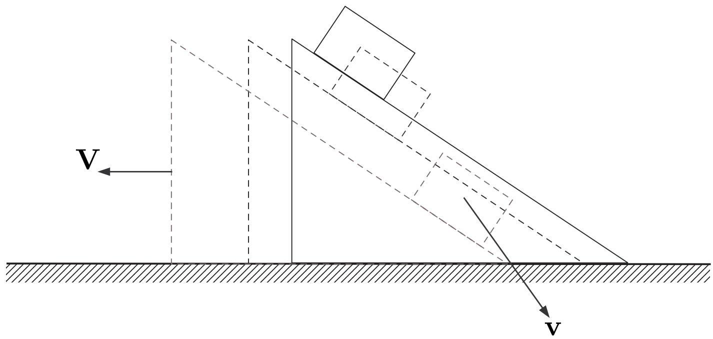
a) بسامدِ نوسان‌هایِ کوچکِ دو جرمِ m را به دست آورید.

a) چه نیرویی از طرفِ میله به دانه‌یِ تسبیح وارد می‌شود.

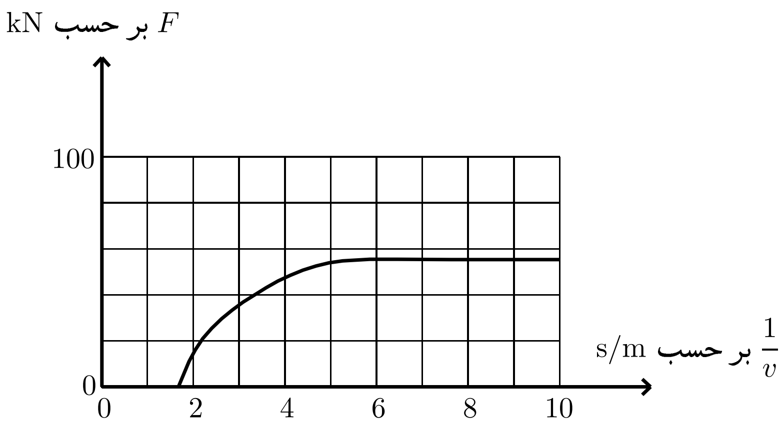


مسئله‌یِ 10) مطابقِ شکل جسمی به جرمِ m رویِ سطحِ شیب‌داری با شیبِ θ به جرمِ M قرار می‌دهیم و دستگاه را رها می‌کنیم. اصطکاکِ بینِ سطحِ شیب‌دار و زمین

را ناچیز بگیرید. ارتفاعِ اولیه‌یِ جرمِ m از سطحِ زمین h است. وقتی m به پایینِ سطحِ شیب‌دار می‌رسد، سرعتِ سطحِ شیب‌دار V، و سرعتِ جرمِ m، $\mathbf{v}$، چه‌قدر است؟

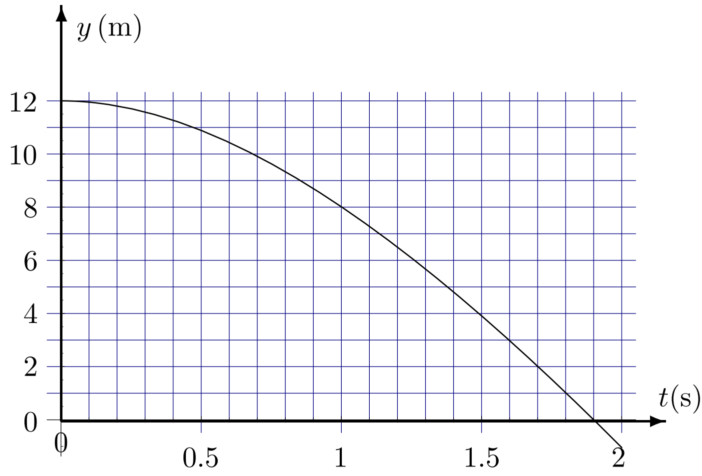


مسئله‌یِ11) یک نوار نقاله باری را جابه‌جا می‌کند. نیرویی که نوار به بار وارد می‌کند (در راستای خود نوار) F است. سرعت بار v است. نمودار F بر حسب $\frac{1}{v}$ به شکل زیر است.



بیشینه‌ی توانی که این نوار نقاله می‌تواند به بار تحویل دهد چند **کیلووات** است؟

مسئله‌یِ12) جسمی به جرمِ $0.9\,\mathrm{Kg}$ از حالت سکون رها می‌شود و در هوا سقوط می‌کند. نمودارِ ارتفاعِ جسم از سطحِ زمین برحسبِ زمان مانندِ شکل است. میان‌گینِ زمانیِ توانِ اتلافیِ نیرویِ مقاومت هوا از لحظه‌یِ رهاشدنِ جسم تا رسیدن آن به زمین چند وات است؟



مسئله‌یِ13) توان متوسط مفید یک کارگر، که حداکثر می‌تواند ۸ ساعت در روز کار کند، $150\,\mathrm{W}$ است. اگر قرار باشد توربین‌های نیروگاه دوهزار مگاواتی شهید رجایی در تمام مدت شبانه‌روز با نیروی انسانی بگردند، کلاً چند نفر کارگر لازم است؟ الف) 4 000 نفر ب) 40 000 نفر ج) 400 000 نفر د) 4 000 000 نفر ه) 40 000 000 نفر

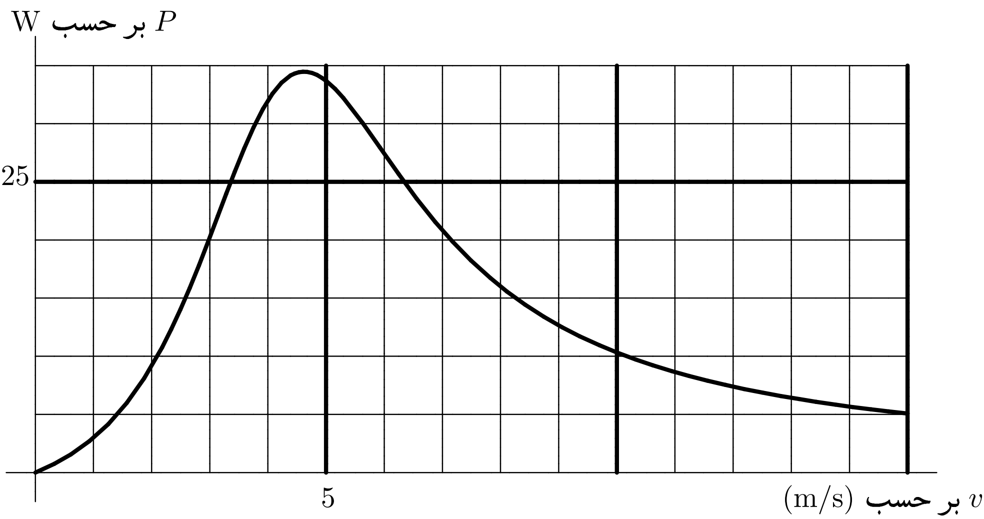
مسئله‌یِ14) به یک متحرک نیرویی (F) وابسته به سرعت آن (v) وارد می‌شود، چنان که P (توان این نیرو) بر حسب سرعت مطابق نمودار است. این نیرو با سرعت هم‌جهت است. جرم این متحرک $1\ \mathrm{kg}$ است. شتاب گرانش را $10\ \mathrm{m/s^2}$ بگیرید.

الف) نمودار F بر حسب v را بکشید.

ب) این جسم از سطح شیب‌داری بالا می‌رود که زاویه‌اش با افق θ است. بیش‌ترین مقدار θ برای این که این جسم بتواند با سرعت ثابت بالا برود (ϕ) چه‌قدر است؟ (به دست آوردن یکی از تابع‌های مثلثاتی ϕ کافی است.)

ج) این جسم از سطح شیب‌داری با $\theta = 30^\circ$ بالا می‌رود. نمودار شتاب این جسم بر حسب سرعت را بکشید.

د) این جسم روی یک سطح افقی در زمان صفر از حالت سکون حرکت می‌کند. می‌خواهیم سرعت این جسم در $t = 3$ s را به دست آوریم. برای این کار فاصله‌ی زمانی صفر تا 3 s را به سه بخش هر یک به اندازه‌ی 1 s تقسیم کنید. در هر بخش، شتاب را به تقریب ثابت و برابر شتاب متناظر با سرعت در ابتدای بخش بگیرید. با این تقریب سرعت در $t = 3$ s را حساب کنید.



مسئله‌یِ15) هنگامی که یک جسمِ جامد می‌شکند، تعدادِ زیادی از پیوندهایِ میانِ ملکول‌هایِ آن گسسته می‌شود. ولی در فرایندِ شکستن، تمامِ انرژی‌یِ داده‌شده به جسم صرفِ گسستنِ پیوندها نمی‌شود. بقیه‌یِ انرژی صرفِ گرما، صوت، و ... می‌شود. انرژی‌یِ لازم برایِ گسستنِ هر پیوندِ ملکولی از مرتبه‌یِ بزرگی‌یِ 10^{-19} J است.

گاهی عددها را به شکل نمادِ علمی‌یِ $A = x \times 10^n$ می‌نویسیم، که $1 \le x < 10$، و n یک عددِ صحیح است. در این صورت، اگر $x < 3$ می‌گوییم A از مرتبه‌یِ بزرگی‌یِ 10^n است، و اگر $x > 3$، می‌گوییم A از مرتبه‌یِ بزرگی‌یِ 10^{n+1} است.

برایِ شیشه مدلی به این شکل در نظر می‌گیریم، که شیشه از واحدهایِ SiO_2 ساخته شده که هر کدام یک مکعب را اشغال می‌کند، و هر مکعب با هر یک

ازمکعب‌هایِ مجاورش یک پیوند دارد. جرمِ یک مول SiO_2، $60\,\mathrm{g}$ است. چگالی‌یِ شیشه را $2000\,\mathrm{kg/m^3}$، و عددِ آوگادرو را 6×10^{23} بگیرید.

یک قطعه شیشه به شکلِ مکب مستطیل به ابعادِ

$$100\,\mathrm{mm} \times 100\,\mathrm{mm} \times 2\,\mathrm{mm}$$

را از ارتفاعِ $30\,\mathrm{cm}$ رویِ سطحِ سختی رها می‌کنیم. شیشه به قطعاتِ کوچکی مطابق شکل شکسته می‌شود.

الف) مجموعِ طولِ شکستگی‌ها در شکل را تخمین بزنید.

ب) طولِ ضلعِ مکعب‌هایِ مدل را تخمین بزنید.

ج) تعدادِ پیوندهایِ شکسته شده را تخمین بزنید.

د) انرژی‌یِ گسستنِ این پیوندها، در این آزمایش، را تخمین بزنید.

ه) انرژی‌یِ جنبشی‌یِ شیشه قبل از شکستن چه قدر است؟

و) چه کسری از انرژی صرفِ شکستنِ پیوندها شده است؟

فصل ۶

مرجع‌ها

1) Similarity and Dimensional Methods in Mechanics, *Sedov L. I.*, 10th edition, CRC press, 1993

۲) تحلیلِ ابعادی، امیر آقامحمدی ، گاما، شماره‌یِ ۲، صفحه‌یِ ۵۰.

۳) پکشِ بیشینه، مریم عرب‌سلمانی، امیر آقامحمدی ، گاما، شماره‌یِ ۳، صفحه‌یِ ۳۸.

۴) یادداشتی بر سیستمِ آحاد و ثوابتِ فیزیکی، امیر حسین فتح‌الهی، گاما، شماره‌یِ ۲، صفحه‌یِ ۵۹.

۵) چرا $F = ma$؟، امیر حسین فتح‌الهی، گاما، شماره‌یِ ۴، صفحه‌یِ ۵۷.

6) Fundamental of Physics, *Halliday D., Resnick R., Walker* ,

7) Introduction to Classical Mechanics, with problems and solutions, *Morin D.*, Cambridge university press, 2007

8) An Introduction to Mechanics, *Kleepner D., Kolenkow R. J.*, McGraw-Hill 1973.